

Lehrbuch

der

elementaren Mathematik

von

Victor Schlegel,

Oberlehrer am Gymnasium in Waren.

Erster Theil.

Arithmetik und Combinatorik.

Wolfenbüttel.

Druck und Verlag von Julius Zwissler.

1878.

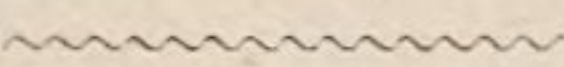
1/10 81

142 F

2.40. M

Lehrbuch
der
elementaren Mathematik

von
Victor Schlegel,
Oberlehrer am Gymnasium in Waren.



Erster Theil.
Arithmetik und Combinatorik.

Wolfenbüttel.
Druck und Verlag von Julius Zwissler.
1878.



Vorrede.

Als ich, zunächst in Folge äusserer Veranlassung, den Entschluss fasste, eine neue Bearbeitung der Elementar-Mathematik zu unternehmen, da war es mir nicht zweifelhaft, dass nur eine mit den alten Traditionen brechende und den modernen strengeren Anforderungen an die Wissenschaftlichkeit gerecht werdende Darstellung ein solches Unternehmen rechtfertigen könne. Ich konnte mich aber um so eher zur Ausführung einer derartigen Arbeit entschliessen, weil theils theoretische Studien, theils eine längere Schulpraxis mich allmählig auf einen Standpunkt geführt hatten, der von demjenigen der meisten übrigen Autoren im Gebiet der Elementar-Mathematik wesentlich abweicht.

Ich will im Folgenden zunächst die in der Neuzeit vorherrschende besondere Richtung der Literatur auf dem Gebiete der Elemente zu charakterisiren und die Ursachen dieser Richtung anzugeben versuchen, sodann meinen eigenen abweichenden Standpunkt darlegen und zuletzt einige Bemerkungen über den vorliegenden ersten Theil meiner Arbeit hinzufügen.

Es zeigen bis auf wenige neue Erscheinungen fast alle im Laufe der letzten Jahrzehnte erschienenen Werke über die Elemente, soweit mir bekannt geworden, das Bestreben, in möglichster Kürze und Uebersichtlichkeit das Nothwendigste des Stoffes zu geben, sich gegenseitig in kleinen pädagogischen Vorthelen zu überbieten und gelegentlich neue Lösungsversuche für von früher her bestehende Schwierigkeiten zu geben. Neben dieser alle Zweige der Elemente gleichmässig treffenden Behandlungsweise hat die Darstellung einzelner derselben noch besondere Richtungen angenommen.

Je mehr man die Arithmetik und Algebra als ein Universal-Instrument zur Behandlung der verschiedensten Aufgaben schätzen lernte, je mehr namentlich die rechnende Geometrie in den höheren Schulen festen Fuss fasste, desto mehr legte man Gewicht auf Erreichung der Fähigkeit, jenes Instrument in möglichst virtuoser Art zu handhaben, desto mehr aber trat auch das Bestreben zurück, die Regeln der Arithmetik systematisch aufzubauen. Begnügen sich doch manche Leitfäden der Arithmetik heut schon mit einfacher Aufzählung der Regeln, und prätendiren doch manche neueren Uebungsbücher schon, ein Lehrbuch der Arithmetik zu ersetzen. So sehr ist in manchen Kreisen der Sinn geschwunden für die Nothwendigkeit, die Arithmetik ebenso wissenschaftlich zu begründen und zu behandeln, wie man es von der Geometrie verlangt.

IV

Die Geometrie sehen wir gegenwärtig in voller Krisis begriffen. Hier hat der mächtige Druck, den die Geometrie der Hochschule auf den elementaren Unterricht ausübte, zuerst das Bewusstsein hervorgerufen, dass man denn doch den Fortschritten der modernen Wissenschaft, soweit ihre Resultate sich elementar darstellen lassen, Rechnung tragen müsse. Damit war das Signal zu einer dem Abkürzungsverfahren entgegengesetzten Strömung gegeben, die sich darin äusserte, dass manchen neueren Lehrbüchern eine mehr oder minder grosse Menge Stoffes aus der modernen Geometrie anhangsweise einverleibt wurde, wodurch diese Bücher in demselben Masse anschwollen, in welchem die arithmetischen zusammenschrumpften. Im weiteren Verlaufe der Entwicklung hat man nun eingesehen, dass mit einer solchen äusserlichen Hinzufügung wenig gewonnen sei, dass es vielmehr nöthig sei, die euclidische Geometrie im Sinne der modernen Wissenschaft zu reformiren. Das erste und natürlichste Beginnen war, den Stoff der euclidischen Geometrie vom modernen Standpunkte aus ganz selbständig darzustellen. Einzelne derartige Versuche sind neuerdings gemacht worden; dieselben erheben aber natürlich nicht den Anspruch, sofort als Grundlage des Schul-Unterrichtes zu gelten; dazu würde nicht eine Reform, sondern eine totale Revolution des mathematischen Unterrichtes erforderlich sein. Der eigentlich praktischen Aufgabe aber, eine vom modernen Geiste getragene, äusserlich dem euclidischen Gange folgende, innerlich an Stelle seines Princip der Congruenzbeweise ein neues setzende Darstellung der Geometrie zu geben, dieser Aufgabe hat man noch nicht näher treten können, weil über das neue Princip selbst noch durchaus keine Klarheit, geschweige Einigkeit besteht. (Ausführlicher werde ich auf diesen Gegenstand in der speciellen Vorrede zum geometrischen Theile dieses Werkes zurückkommen.)

Weniger als die beiden bisher genannten Gebiete sind vorderhand Trigonometrie und Stereometrie von neuen Strömungen berührt worden, obwohl es auch hier später an Reformen nicht fehlen wird.

Die Ursache des oben charakterisirten Strebens nach Herstellung möglichst compendiöser Bücher liegt, wie ich meine, zunächst in der Ueberfüllung der mittleren Klassen unserer höheren Schulen, vornehmlich grösserer Städte; ferner in der durch Theilung dieser Klassen nothwendig gewordenen Einrichtung halbjähriger Pensa, und in der aus beiden Umständen erwachsenden Nothwendigkeit, auf Einübung der Hauptsachen sich zu beschränken, wobei überdies durch den Mangel an Zeit einer verstandesmässigen, den Gegenstand vielseitig beleuchtenden Einprägung das grösste Hinderniss in den Weg gelegt wird. Das Ideal des mathematischen Unterrichtes, nämlich mathematische Durchbildung des Schülers, muss unter solchen Umständen im Allgemeinen von vornherein aufgegeben werden, wenn das Lehrbuch den Schüler ebenso stiefmütterlich behandelt, wie es aus Mangel an Zeit der mündliche Unterricht thun muss. Erreicht wird jenes Ideal dann nur von einzelnen, besonders befähigten, durch rasche Auffassung ausgezeichneten Köpfen; erreicht wird im günstigen Falle im Allge-

meinen Sicherheit der Kenntnisse und Geläufigkeit im Anwenden derselben zur Lösung von Aufgaben — immerhin ganz schätzbare Resultate, die aber gerade den Werth der Mathematik als eines allgemeinen Bildungsmittels noch nicht genügend hervortreten lassen. Denn wenn in neuerer Zeit die elementare Mathematik mit mehr Respect behandelt wird, als früher, so liegt der Grund wahrlich weit weniger in der allgemeiner gewordenen Erkenntniss jenes Bildungswerthes, als in dem Ansehen, welches sich die Mathematik überhaupt durch ihre Anwendungen auf andere Wissenschaften erworben hat.

Im Allgemeinen ist es also, wie ich glaube, ein pädagogischer Nothstand gewesen, der auf den Charakter der Lehrbücher in abgekürzter Form hingewirkt hat. Von diesen „Leitfäden“ durch das vermeintliche Labyrinth der Mathematik fanden sich nun freilich oft nur die Autoren, die ihren individuellen pädagogischen Bedürfnissen darin gerecht geworden waren, befriedigt; weitere Verbreitung erlangten nur wenige derartige Bücher. Man hat neuerdings, die Noth in eine Tugend verkehrend, sogar die Theorie aufgestellt, als sei der kürzeste Leitfaden in der Hand des Schülers der beste, und die Befürchtung durchblicken lassen, ein ausführliches Lehrbuch lasse dem Lehrer zu wenig zu thun übrig. Ich kann diese Ansicht nicht theilen. Der denkende Lehrer wird gerade aus einem ausführlichen Lehrbuche für sich selbst wie für den zur Selbstthätigkeit angeregten Schüler den grössten Nutzen schöpfen; er wird die Auswahl des Stoffes freier gestalten und dem jedesmaligen Standpunkte der Generation anpassen können; er wird, wenn auch das Lehrbuch alles enthalten sollte, was dem Schüler an Kenntnissen beizubringen ist, in der Anleitung zum mathematischen Denken und Arbeiten eine mehr als ausreichende Beschäftigung finden, und zugleich genügenden Spielraum für die Entfaltung seiner Individualität. Und gerade da, wo unzweckmässige Schuleinrichtungen eine genügende Durcharbeitung des Lehrstoffes in der Schule erschweren, wird es von besonderem Werthe sein, den strebsamen Schüler auf sein Lehrbuch verweisen zu können, damit er nicht nöthig habe, sich auf die karge Kost zu beschränken, welche für die grosse Masse der Mittelmässigen genügt. Auch die Besorgniss, der Schüler werde sich in einem ausführlichen Werke nicht zurecht finden, kann ich nicht als begründet erkennen; findet er sich doch in den regelmässigen Gängen und den labyrinthischen Seitenpfaden der Grammatik zurecht. Nicht die Ausführlichkeit hindert das Sichzurechtfinden, sondern der Mangel einer Anordnung des Stoffes nach logischen Principien.

Dies sind im Allgemeinen die Gründe, aus denen ich mich gegen die Leitfaden-Literatur auf dem Gebiete der Mathematik aussprechen muss, und der Ansicht bin, man müsse, wenn auch äussere Umstände zu allerlei Beschränkungen des Lehrstoffes nöthigen, doch dem Schüler wie dem Lehrer Gelegenheit geben, mit Hilfe des Lehrbuches die Elemente von einer wissenschaftlicheren Seite kennen zu lernen, resp. kennen zu lehren, als es mit Hilfe der Leitfäden und selbst mündlicher Ergänzungen möglich ist. — Hat man in den letzten

VI

Jahrzehnten über der Ausbildung der Elemente nach der pädagogischen Seite hin jene wissenschaftliche Seite vernachlässigt, so ist es wohl Zeit — und es fehlt nicht an Zeichen, dass das Bedürfniss hiernach sich wirklich geltend macht — nun auch der letzteren ihr Recht werden zu lassen.

Indem ich nun meine eigene Arbeit den hier entwickelten Principien gemäss zu gestalten suche, indem ich namentlich danach strebe, eine allgemeinere Auffassung darin hervortreten zu lassen, die sich nicht ängstlich an Pensa anklammert, sondern diese zufälligen Eintheilungen dem Lehrer überlässt, hoffe ich, dass dieselbe dazu beitragen möge, das darin vertretene Princip der freien wissenschaftlichen Entfaltung auf dem Gebiete der Elemente wieder mehr zur Geltung zu bringen. Ich hoffe, dass das Buch dem jüngeren Schüler unter Anleitung und verständiger Auswahl des Stoffes seitens des Lehrers ebenso ein nützlicher Begleiter sein soll, wie es dem geistig Gereiften auch ohne weitere Beihilfe einen Einblick in den regelmässigen Bau des mathematischen Systems und einen zu weiterem Studium anregenden Ausblick in die nicht elementaren Gebiete der Mathematik gewähren soll.

Soviel über die allgemeine Anlage des Werkes. Was den hier vorliegenden ersten Theil betrifft, so schliesst sich die Arithmetik an eine Ausarbeitung an, die ich bereits vor neun Jahren vollendete, und an der ich bei Verfolgung der wichtigsten seither erschienenen Literatur wenig oder nichts zu ändern fand. Inzwischen haben namentlich die bahnbrechenden Arbeiten von Hankel (Theorie der complexen Zahlensysteme) und Schröder (Lehrbuch der Arithmetik und Algebra) sich mit Erfolg bemüht, das Wesen der Grundoperationen tiefer erfassen zu lehren, als es vordem geschah. Auch J. G. Grassmann's scharfsinnige Abhandlung „Ueber den Begriff und Umfang der reinen Zahlenlehre“ wäre hier in erster Linie zu nennen, wenn sie nur überhaupt bekannter geworden wäre. Von Arbeiten, die mir bei der Darstellung einzelner Gegenstände von Nutzen gewesen sind, habe ich zu nennen: H. Grassmann's Lehrbuch der Arithmetik (in der Reihentheorie) und verschiedene Arbeiten von S. Günther (zur Theorie der Kettenbrüche), während ich in der Darstellung der Probleme der Wahrscheinlichkeitsrechnung mich den Vorlesungen Kummer's anschloss.

Als Anwendung der Arithmetik habe ich eine vollständige Theorie der Decimalrechnung hinzugefügt. Ich halte es für wichtig, dass der Schüler, und sei es auch erst in den oberen Klassen, einen deutlichen Einblick in das Verhältniss des gemeinen Rechnens zur Buchstabenrechnung gewinne, bin aber auch der Ansicht, dass alles, was eben nur das Erlernen dieses Rechnens betrifft, dem Rechenpensum der unteren Klassen bis incl. Quarta zuzuweisen ist. Ich halte die sogenannten bürgerlichen Rechnungsarten, mit Ausnahme der Zinsrechnung, für einen Ballast, den man aus dem Unterrichte der Quarta entfernen sollte. Legt man Werth auf die Umsetzung von Wortaufgaben in Gleichungen, so bietet später die Lehre von den Gleichungen selbst genug Gelegenheit, diese Uebung in weit fruchtbarer, weil mannigfaltiger Weise anzustellen. Die

dadurch frei werdende Zeit in Quarta sollte man aber durch zwei Gegenstände des eigentlichen Decimalrechnens: Quadratwurzelauszziehung und Uebung im Gebrauche der vierstelligen Logarithmentafel ausfüllen. Diese Arbeit ist für den Schüler viel leichter, interessanter, und namentlich nützlicher, als die Beschäftigung mit den meist recht wenig der Wirklichkeit entsprechenden Aufgaben der bürgerlichen Rechnungsarten, die überdies später durch Gleichungen viel besser gelöst werden. Man erspart dann auch die durch die Logarithmen ganz überflüssig gewordenen und zum Theil viel zu schwierigen abgekürzten Rechnungen mit Decimalbrüchen. — Die directe Methode der Cubikwurzelauszziehung verwerfe ich wegen ihrer Complicirtheit. Man könnte höchstens einwenden, dass Quadrat- und Cubikwurzeln in praktischen Aufgaben vorkommen, was bei höheren Wurzeln nicht der Fall ist. Ich denke aber, dass die in neuerer Zeit hergestellten vierstelligen Logarithmentafeln bald genug Gemeingut des Volkes werden können, sobald man durch Herstellung wirklicher Tafelform, sowie durch ihre Aufnahme in Kalender, Taschenbücher und Lehrbücher der Mathematik ihre Verbreitung fördert. Für die gewöhnlichen Fälle der Praxis werden sie alle wünschenswerthe Genauigkeit geben, und namentlich auch für die directe Methode der Cubikwurzelauszziehung genügenden Ersatz gewähren.

Begriff und Anwendung der Determinanten habe ich in dem Umfange aufgenommen, als es die Verwendbarkeit dieses Instrumentes in der elementaren Mathematik erfordert. Dagegen halte ich die Uebungen im Umformen der Determinanten, sowie die Entwicklung ihrer weiteren Eigenschaften für einen dem Schul-Unterrichte ferner liegenden Gegenstand; einmal, weil die Determinante in ihrer gegenwärtig üblichen Gestalt das Ideal einer abgekürzten Schreibweise nur unvollkommen erreicht, sodann, weil der Nutzen derselben doch besonders in Gebieten der Mathematik hervortritt, die man gegenwärtig noch nicht zu den elementaren rechnet. — Bei der unter Nr. 118 mitgetheilten gemeinsamen Methode zur Lösung der Gleichungen vom 2., 3. und 4. Grade wird man leicht den Zusammenhang mit der Theorie der binären Formen und deren geometrischer Darstellung in der projectivischen Geometrie erkennen. — Das für den Logarithmus gewählte Zeichen empfehle ich mit Rücksicht auf seine Einfachheit, und auf den Umstand, dass es sich besonders leicht an die bisher übliche Bezeichnung „log“ anschliesst. — Die am Schluss gegebene Uebersicht der Formeln und Regeln ist zur Erleichterung der Repetition bestimmt. Ueber andere Eigenthümlichkeiten der Darstellung, die dem aufmerksamen Blicke des Kenners nicht entgehen werden, habe ich hier nichts weiter hinzuzufügen.

Ich empfehle schliesslich mein Unternehmen und zunächst den vorliegenden Theil der Aufmerksamkeit des mathematischen Publikums und bitte um Mittheilung von Wünschen behufs etwaiger Aenderungen.

Waren im Februar 1878.

V. Schlegel.

Inhalt des ersten Theils.

	Seite
Einleitung in die Mathematik . .	1
Reine Arithmetik.	
Einleitung (1—3).	
1. Entstehung, Begriff und Bezeichnung der Zahlen (1)	6
2. Vergleichung der Zahlen (2. 3)	6
Erste Abtheilung; Die einfachen Zahlen (4—71).	
A. Die absoluten Zahlen (4—55).	
1. Die Addition (5—9)	8
5. Vorbemerkung. — 6. Erklärungen. — 7. Eigenschaften der Addition. — 8. Weitere Bemerkungen zur Addition. — 9. Rechnung mit Resultaten.	
2. Die Subtraction (10—16)	11
10. Vorbemerkung. — 11. Erklärungen. — 12. Eigenschaft der Subtraction. — 13. Weitere Bemerkungen zur Subtraction. — 14. Zusammenhang mit der Addition. — 15. Rechnung mit Resultaten. — 16. Erweiterungen.	
3. Die Multiplication (17—22)	15
17. Vorbemerkung. — 18. Erklärungen. — 19. Eigenschaften der Multiplication. — 20. Weitere Bemerkungen zur Multiplication. — 21. Rechnung mit Resultaten 1. Stufe. — 22. Rechnung mit Resultaten 2. Stufe.	
4. Die Division (23—30)	19
23. Vorbemerkung. — 24. Erklärungen. — 25. Eigenschaft der Division. — 26. Weitere Bemerkungen zur Division. — 27. Zusammenhang mit der Multiplication. — 28. Rechnung mit Resultaten 1. Stufe. — 29. Rechnung mit Resultaten 2. Stufe. — 30. Erweiterungen.	
5. Die Potenzirung (31—37)	26
31. Vorbemerkung. — 32. Erklärungen. — 33. Eigenschaft der Potenzirung. — 34. Weitere Bemerkungen zur Potenzirung. — 35. Rechnung mit Resultaten 1. Stufe. — 36. Rechnung mit Resultaten 2. Stufe. — 37. Rechnung mit Resultaten 3. Stufe.	

6. Die Radicirung (38—46)

38. Vorbemerkung. — 39. Erklärungen. — 40. Eigenschaft der Radicirung. — 41. Weitere Bemerkungen zur Radicirung. — 42. Zusammenhang mit der Potenzirung. — 43. Rechnung mit Resultaten 1. Stufe. — 44. Rechnung mit Resultaten 2. Stufe. — 45. Rechnung mit Resultaten 3. Stufe. — 46. Erweiterungen.

7. Die Logarithmirung (47—55) 37

47. Vorbemerkung. — 48. Erklärungen. — 49. Eigenschaft der Logarithmirung. — 50. Weitere Bemerkungen zur Logarithmirung. — 51. Zusammenhang mit der Potenzirung. — 52. Rechnung mit Resultaten 1. Stufe. — 53. Rechnung mit Resultaten 2. Stufe. — 54. Rechnung mit Resultaten 3. Stufe. — 55. Rückblick.

B. Die relativen Zahlen (56—71).

1. Die Null (57—59) 42

57. Vorbemerkungen. — 58. Erklärung. — 59. Rechnungen mit der Null.

2. Die negativen Zahlen (60—62) 44

60. Vorbemerkungen. — 61. Erklärungen. — 62. Rechnungen mit den negativen Zahlen.

3. Die Eins (63—65) 47

63. Vorbemerkungen. — 64. Erklärung. — 65. Rechnungen mit der Eins.

4. Die umgekehrten Zahlen (66—68) 49

66. Vorbemerkungen. — 67. Erklärungen. — 68. Rechnungen mit den umgekehrten Zahlen.

5. Die irrationalen Zahlen (69—71) 51

69. Allgemeines. — 70. Vorbemerkung. — 71. Erklärungen.

Zweite Abtheilung: Die zusammengesetzten Zahlen (72—153).**A. Die Polynome (72—76) 52**

72. Uebersicht. — 73. Reduction eines zusammengesetzten Ausdrucks auf eine allgemeine Form. — 74. Erklärungen. — 75. Vereinfachungen der allgemeinen Form des Polynoms. — 76. Rechnungen mit Polynomen.

B. Die Proportionen (77—88) 58

77. Vorbemerkung. — 78. Erklärungen.

1. Die arithmetische Proportion (79—83) 58

79. Allgemeine Form. — 80. Eigenschaften der arithm. Proportion. — 81. Besondere Eigenschaften der Differenz-Proportion. — 82. Stetige Proportion. — 83. Erweiterung.

2. Die geometrische Proportion (84—88) 60

84. Allgemeine Form. — 85. Eigenschaften der geom. Proportion. — 86. Besondere Eigenschaften der Quotienten-Proportion. — 87. Stetige Proportion. — 88. Erweiterung.

	Seite
C. Die Gleichungen (89—119)	63
89. Vorbemerkung. — 90. Erklärungen. — 91. Eintheilung der Gleichungen.	
I. Algebraische Gleichungen (92—118) . .	64
92. Reduction einer algebraischen Gleichung auf die Normalform. — 93. Eintheilung der algebraischen Gleichungen. — 94. Auflösung der algebraischen Gleichungen. (Vorbemerkungen.)	
1. Die Gleichung vom 1. Grade (95—97) . . .	66
95. Auflösung. — 96. Erweiterung. Gleichungen mit mehreren Unbekannten. — 97. Eliminationsmethoden. 1) Die Substitutionsmethode. 2) Die Comparationsmethode. 3) Die Additionsmethode. 4) Die Determinantenmethode.	
2. Die Gleichung vom 2. Grade (98—107) . . .	73
98. Die reine Gleichung. Auflösung. — 99. Die gemischte Gleichung. Auflösung. — 100. Zusammenhang zwischen den Wurzeln und den Coefficienten der Gleichung. — 101. Erweiterung des Zahlbegriffes durch die Gleichungen 2. Grades. — 102. Die imaginäre Einheit. Erklärung. — 103. Eigenschaften der imaginären Einheit. — 104. Die imaginären und complexen Zahlen. Erklärungen. — 105. Beziehungen zwischen zwei conjugirten Zahlen. — 106. Rechnungen mit zwei complexen Zahlen. — 107. Erweiterung. Gleichungen mit mehreren Unbekannten.	
3. Die Gleichung vom 3. Grade (108—112) . .	82
108. Die reine Gleichung. Auflösung. — 109. Die gemischte Gleichung. Herstellung der reducirten Form. — 110. Auflösung. — 111. Untersuchung der Wurzeln. — 112. Zusammenhang zwischen den Wurzeln und den Coefficienten der Gleichung.	
4. Die Gleichung vom 4. Grade (113—118) . .	87
113. Die reine Gleichung. Auflösung. — 114. Die gemischte Gleichung. Herstellung der reducirten Form. — 115. Auflösung. — 116. Untersuchung der Wurzeln. — 117. Zusammenhang zwischen den Wurzeln und den Coefficienten der Gleichung. — 118. Gemeinsame Methode zur Lösung der Gleichungen 2., 3. und 4. Grades.	
II. Exponentialgleichungen (119) . . .	95
119. Auflösung.	
D. Die Reihen (120—143)	95
120. Vorbemerkung.	
I. Die arithmetische Reihe (121—139) . .	97
1. Reihen erster Ordnung (121—134)	97
121. Reihen erster Stufe. Erklärungen. — 122. Eigenschaften der arithmetischen Reihe. — 123. Specielle Fälle. — 124. Die unendliche arithmetische Reihe. — 125. Reihen zweiter Stufe. Vorbemerkung. — 126. Erklärungen. — 127. Andere Formen der Factorielle. — 128. Factoriellen-Gebiet einer Zahl. — 129. Beziehung zwischen zwei Factoriellen mit der Exponentensumme a . — 130. Beziehung zwischen zwei benachbarten Factoriellen. — 131. Beziehung zwischen den Factoriellen zweier	

benachbarter Zahlen. — 132. Factorielle einer Summe. — 133. Factorielle einer negativen Zahl. — 134. Factorielle einer umgekehrten Zahl.

2. Reihen höherer Ordnung (135—139) 103

135. Summenreihen. — 136. Differenzreihen. — 137. Reihen n^{ter} Ordnung. — 138. Bestimmung des allgemeinen Gliedes der Reihe n^{ter} Ordnung. — 139. Bestimmung der Summe der Reihe n^{ter} Ordnung.

II. Die geometrische Reihe (140—143) 107

140. Erklärungen. — 141. Eigenschaften der geometrischen Reihe. — 142. Specielle Fälle. — 143. Die unendliche geometrische Reihe.

E. Die Kettenbrüche (144—153) 111

I. Endliche Kettenbrüche (144—150) 111

144. Vorbemerkung. — 145. Erklärungen. — 146. Verwandlung eines Quotienten in einen Kettenbruch. — 147. Verwandlung eines Kettenbruchs in einen Quotienten. — 148. Näherungsbrüche eines Kettenbruchs. — 149. Eigenschaften der Näherungswerthe. — 150. Diophantische Gleichungen.

II. Unendliche Kettenbrüche (151—153) 120

151. Vorbemerkung. — 152. Darstellungen der Wurzel einer quadratischen Gleichung als Kettenbruch. — 153. Verwandlung eines periodischen Kettenbruchs in einen irrationalen Ausdruck.

Angewandte Arithmetik.

I. Die Decimalrechnung (154—169).

1. Ganze Decimalzahlen (154—157) 123

154. Vorbemerkung. — 155. Erklärungen. — 156. Rechnungen mit Decimalzahlen. — 157. Anwendungen der Kettenbrüche auf Decimalzahlen und Gleichungen.

2. Decimalbrüche (158—163) 126

158. Vorbemerkung. — 159. Erklärungen. — 160. Rechnungen mit Decimalbrüchen. — 161. Verwandlung eines Quotienten und einer Quadratwurzel in einen Decimalbruch. — 162. Eintheilung der Decimalbrüche. — 163. Verwandlung eines Decimalbruchs in einen Quotienten.

3. Näherungswerthe (164—169) 132

164. Vorbemerkung. — 165. Näherungswerthe durch Kettenbrüche. Näherungsweise Bestimmung der Wurzel einer Gleichung. — 166. Näherungsweise Bestimmung eines Logarithmus. — 167. Näherungswerthe durch Logarithmen. — 168. Logarithmische Systeme. — 169. Eigenschaften des gemeinen logarithmischen Systems.

II. Die Zinsrechnung (170—176).

1. Einfache Zinsrechnung (170—172) 139

170. Vorbemerkung. — 171. Erklärungen. — 172. Weitere Formeln.

2. Zinseszins-Rechnung (173—176) 140

173. Vorbemerkung. — 174. Bestimmung der Summe, zu der ein auf Zinseszins stehendes Capital anwächst. — 175. Erweiterung. — 176. Specielle Fälle.

Reine Combinatorik.

Einleitung (177)	143
1. Das Permutiren (178—180)	144
178. Erklärungen. — 179. Bildung der Permutationen. — 180. Bestimmung der Anzahl der Permutationen.	
2. Das Combiniren (181—183)	146
181. Erklärungen. — 182. Bildung der Combinationen. — 183. Bestimmung der Anzahl der Combinationen.	
3. Das Variiren (184—189)	148
184. Erklärungen. — 185. Bildung der Variationen. — 186. Bestimmung der Anzahl der Variationen.	

Angewandte Combinatorik.

I. Die Binomialreihe (187—189)	150
187. Vorbemerkung. — 188. Aufstellung der Binomialreihe. — 189. Erklärung.	
II. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung (190—198)	152
Einleitung (190. 191)	152
190. Wahrscheinlichkeit durch Beobachtung. — 191. Wahrscheinlichkeit durch Berechnung.	
A. Wahrscheinlichkeit für einen Fall (192—197)	155
a. Einfache Wahrscheinlichkeit (192—195)	155
192. Erklärung. — 193. Folgerungen. — 194. Einfache Ereignisse. — 195. Zusammengesetzte Ereignisse.	
b. Combinirte Wahrscheinlichkeit (196. 197)	161
196. Getrennte Wahrscheinlichkeit. — 197. Zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit.	
B. Wahrscheinlichkeit für mehrere Fälle (198)	163
Uebersicht der Formeln und Regeln	165
Register	179
Berichtigungen	182

Einleitung

in die Mathematik.

1. Durch Sinneswahrnehmung erlangt unser Geist die Vorstellungen von Objecten. Die Bearbeitung dieser Vorstellungen heisst Denken. Die Arbeit des Geistes im Denken kann aber sowohl mit Rücksicht auf das Object des Denkens wie auf die Art des Denkens von zweierlei Art sein. In erster Hinsicht bezieht sie sich entweder auf mehrere unveränderliche oder auf ein veränderliches Object.

Anm. Da verschiedene Zustände eines veränderlichen Objectes als ebensoviele unveränderliche Objecte betrachtet werden können, so ist klar, wie ein und dasselbe Object beiden Betrachtungsweisen unterworfen werden kann.

In beiden Fällen ist die Arbeit des Geistes wiederum eine doppelte:

1a. Da mehrere Objecte sich in manchen ihrer Merkmale unterscheiden, so kann man sich auf die Betrachtung dieser Merkmale beschränken, und die Objecte überhaupt als ungleich ansehen.

1b. Da sie aber auch Merkmale gemeinsam haben (und wäre es auch nur das der Existenz), so kann man sich auf die Betrachtung dieser Merkmale beschränken, und die Objecte überhaupt als gleich ansehen.

2a. Da ein Object manches seiner Merkmale ändert, so kann man sich auf diese veränderlichen Merkmale beschränken und die Zustände des Objectes als ungleich ansehen.

2b. Da andere seiner Merkmale unverändert bleiben, so kann man auch auf diese sich beschränken und die Zustände des Objectes als gleich ansehen.

2. Die Mathematik ist nun diejenige Wissenschaft, in welcher an den Objecten stets nur entweder die veränderlichen resp. ungleichen, oder die unveränderlichen resp. gleichen Merkmale betrachtet werden, und zwar nicht einzeln, sondern in ihrer Gesammtheit, so zwar, dass die Objecte überhaupt nur als

- | | |
|-------------------|------------|
| 1. unveränderlich | a ungleich |
| 2. veränderlich | b gleich |

erscheinen.

3. Aus den gegebenen Vorstellungen leiten wir neue ab durch Zusammenfassung, indem wir nämlich entweder die Vorstellungen mehrerer Objecte oder die Reihe von Zuständen eines Objectes als ein neues Object betrachten. Diese neuen Vorstellungen heissen Formen, und zwar

1. discrete, wenn sie aus Vorstellungen unveränderlicher,
2. stetige, wenn sie aus Vorstellungen veränderlicher,
 - a. combinatorische, wenn sie aus Vorstellungen ungleicher,
 - b. arithmetische, wenn sie aus Vorstellungen gleicher Objecte abgeleitet sind.

Durch Zusammenstellung dieser Betrachtungsweisen ergeben sich folgende Resultate:

I. Man betrachtet die unveränderlichen Objecte als gleich. In diesem Falle nennt man sie Einheiten, die aus den Einheiten durch Zusammenfassung abgeleiteten Formen: Zahlen, und die Wissenschaft, deren Gegenstand die Zahlen sind: Arithmetik (Zahlenlehre).

Anm. Beim Zählen von Gegenständen fassen wir nur das Merkmal der Existenz ins Auge und betrachten alle Gegenstände als gleich und unveränderlich. Das Resultat der Zusammenfassung ist die Zahl, zunächst die benannte Zahl, d. h. die Verbindung von Zahl und Begriff, sodann, indem wir den gezählten Gegenständen den gemeinsamen Namen Einheiten geben, also vom Begriff absehen, die absolute Zahl. — Statt vom Begriff kann man auch von der Zahl absehen. Aus dieser Betrachtungsweise geht die Begriffslehre oder Logik hervor, die man als einen der Zahlenlehre verwandten Zweig der Mathematik betrachten und behandeln kann, indem nur die Grundgesetze für die Verbindung der Einheiten von denen für die Verbindung der Begriffe verschieden sind. (Vgl. Die Formenlehre oder Mathematik, von R. Grassmann. Stettin 1872. S. 13.)

II. Man betrachtet die unveränderlichen Objecte als ungleich. In diesem Falle nennt man sie Elemente, die aus den Elementen durch Zusammenfassung abgeleiteten Formen:

Combinationsen, und die Wissenschaft, deren Gegenstand die Combinationen sind: Combinatorik (Combinationslehre).

Anm. Beim Ordnen von Gegenständen, z. B. bei der Zusammenfügung von Buchstaben zu einem Worte, betrachten wir die Objecte, also hier die Buchstaben, mit Rücksicht auf ihre verschiedene Bedeutung als absolut ungleich. Die etwaigen gleichen Merkmale, also der gleiche Stoff (Tinte, Kreide), oder die Zugehörigkeit zu derselben Schriftgattung, bleiben gänzlich unberücksichtigt. Wörter, die aus denselben Buchstaben, nur in verschiedener Folge, bestehen, wie „nebel“ und „leben“, sind verschiedene Combinationen derselben Elemente.

III. Man betrachtet die Zustände eines veränderlichen Objectes als gleich. In diesem Falle nennt man das ursprüngliche Object: Grösse, jede Form, deren Beziehung zu dem gegebenen Objecte bei Aenderung des letzteren unverändert bleibt: Funktion, und die Wissenschaft, deren Gegenstand die Funktionen sind: Funktionslehre.

Anm. Beispiel: Das veränderliche Object sei der von einem fallenden Körper seit Beginn des Falles zurückgelegte Weg. Wir nennen diesen Weg x , gleichviel, welcher Dauer des Falles er entspricht, und betrachten somit die verschiedenen Zustände des veränderlichen Objectes als gleich. Eine Form, deren Beziehung zur Grösse x unverändert bleibt, wenn x sich ändert, ist die Geschwindigkeit des fallenden Körpers; wir nennen daher die Geschwindigkeit eine Funktion von x .

IV. Man betrachtet die Zustände eines veränderlichen Objectes als ungleich. In diesem Falle nennt man das ursprüngliche Object: Punkt, den Inbegriff der ungleichen Zustände: Gebilde; ebenso jede aus einem Gebilde durch Aenderung abgeleitete Form. Die Wissenschaft, deren Gegenstand die Gebilde sind, heisst Raumlehre.

Anm. Die durch Bewegung eines Punktes entstehende Strecke umfasst alle verschiedenen Zustände des Punktes während der Bewegung, ist also ein Gebilde, desgl. die durch Bewegung einer Strecke entstehende Fläche.

Hiernach behandelt

- I. die Zahlenlehre die arithmetischen discreten Formen,
- II. die Combinationslehre die combinatorischen discreten Formen,
- III. die Funktionslehre die arithmetischen stetigen Formen,
- IV. die Raumlehre die combinatorischen stetigen Formen.

Anm. Ein und dasselbe Object kann unter verschiedenen Namen erscheinen, je nach der Betrachtung, welcher dasselbe unterworfen wird. Z. B.: Der Würfel als Einheit, wenn mehrere Würfel gezählt werden, als Zahl, wenn sein Inhalt durch eine Kubikeinheit gemessen wird, als Element, wenn mehrere Würfel geordnet werden, als Combination, wenn eine Menge von Elementen in Form eines Würfels geordnet werden, als Punkt, wenn es sich um die Bahn eines bewegten Würfels handelt, als

Gebilde, wenn seine Entstehung aus dem Punkte verfolgt wird, als Grösse, wenn die Abhängigkeit des Inhalts der ihm umschriebenen Kugel von seinem eigenen, als Funktion, wenn die Abhängigkeit seines Inhalts von der Länge seiner Seite untersucht wird.

4. Die Bezeichnung der gegebenen Objecte sowie der Formen geschieht durch Buchstaben. — In den Zweigen, welche die algebraischen Formen behandeln, erscheinen die als gleich betrachteten Einheiten und Grössen nicht einzeln unter besonderen Zeichen, sondern dasselbe Zeichen ($1, x$) genügt für alle. In den Zweigen, welche die combinatorischen Formen behandeln, erscheinen die als verschieden betrachteten Punkte und Elemente, jedes durch einen besonderen Buchstaben bezeichnet.

5. Für jeden Zweig der Mathematik ergeben sich zwei verschiedene Behandlungsweisen, je nachdem man von den speciellen, einfachen Formen zu den allgemeinen, zusammengesetzten vorschreitet, oder die Formen in ihrer grössten Allgemeinheit aufstellt, und die daran gefundenen Gesetze hinterher auf die speciellen Fälle anwendet. Die erste Methode ist die genetische; sie führt vor unseren Augen das Gebäude der Wissenschaft Stück für Stück auf. Die andere ist die dogmatische; sie führt uns in dem fertigen Gebäude herum und zeigt uns seine Theile. Es ist klar, dass der erste Weg den Vorzug verdient, wo es sich darum handelt, Jemand in die Wissenschaft einzuführen, während für denjenigen, welcher das Ganze schon beherrscht, der zweite Weg der kürzere und übersichtlichere ist.

Wie es in jedem einzelnen der vier Zweige die Aufgabe der allgemeinen Betrachtungen ist, die speciellen Resultate unter einem höheren Gesichtspunkte zu vereinigen, und das Gemeinsame derselben festzustellen, so lässt sich auch ein allen vier Zweigen gemeinsamer Theil aussondern, der „allgemeine Formenlehre“ genannt werden, und je nach der gewählten Form der Darstellung den Anfang oder den Schluss des Ganzen bilden kann.

6. Die Wahrheiten der Mathematik, mit andern Worten die Resultate mathematischer Forschungen, lassen sich ebenso wie andere Producte geistiger Arbeit in Sätzen ausdrücken. Die Form dieser Sätze wird aber abgekürzt, indem die Nomina (Formen) durch Buchstaben, die Beziehungen derselben durch Zeichen von verabredeter Bedeutung ausgedrückt werden. Ein so ausgedrückter Satz heisst Formel, und das Uebertragen einer Formel in die gewöhnliche Sprache: Lesen der Formel.

7. Alle die mannigfachen Objecte, die sich dem denkenden Geiste zur Bearbeitung darbieten, liegen gleichmässig in zwei Gebieten, die gewissermassen ein von vornherein gegebenes Feld seiner Thätigkeit sind, von dem er sich nicht entfernen kann. Diese Gebiete sind Raum und Zeit. Innerhalb dieser Gebiete können wir Objecte zusammenfassen und ihren Aenderungen folgen.

Der Raum ist dasjenige Gebiet, in welchem die Objecte als Elemente oder Punkte, die Zeit dasjenige, in welchem sie als Einheiten oder Grössen (in dem oben festgestellten Sinne) erscheinen. Hiernach handelt es sich in der Zahlenlehre um die zeitliche, in der Combinationslehre um die räumliche Zusammenfassung mehrerer Objecte; in der Funktionslehre um die zeitliche, in der Raumlehre um die räumliche Aenderung eines Objectes.

Mehrere Objecte heissen, insofern sie sich zusammenfassen lassen,

als Einheiten: zählbar, als Elemente: combinationsfähig.

Ein Object heisst, insofern es sich ändern lässt,
als Grösse: veränderlich, als Punkt: beweglich.

8. Zwischen den vier Zweigen der Mathematik bestehen mannigfache Beziehungen. Da nämlich alle Objecte gleichmässig in Zeit und Raum existiren, so gestatten Zahlen- und Combinationslehre, sowie Funktions- und Raumlehre gegenseitige Anwendung auf einander. Da ferner die Zustände eines veränderlichen Objectes als einzelne Objecte betrachtet werden können, so ist die Funktionslehre mit der Zahlenlehre, und ebenso die Raumlehre mit der Combinationslehre verwandt.

9. Die Elemente der Mathematik umfassen Arithmetik und Combinatorik, sowie die Anfangsgründe der Raumlehre. Die Anfänge der Funktionslehre pflegen nicht als besonderer Zweig behandelt zu werden, sondern nehmen ihre Stelle da ein, wo sie auf die Raumlehre angewendet werden. — Wir unterscheiden ferner reine und angewandte Mathematik, je nachdem die Einheiten und Elemente, Grössen und Punkte nur für sich, oder zu dem Zwecke untersucht werden, Beziehungen zwischen Objecten der Wirklichkeit zu entdecken, die man sich unter dem Bilde jener vorstellt. (Ausführlicheres über das Verhältniss der vier Zweige der Mathematik s. bei H. Grassmann. Die lineale Ausdehnungslehre. Leipzig 1844, in der Einleitung.)

Reine Arithmetik.

Einleitung.

1. Entstehung, Begriff und Bezeichnung der Zahlen.

1. Alle Gegenstände unserer Wahrnehmung haben das Merkmal des Vorhandenseins (der Existenz) an sich. Indem wir nur auf dieses Merkmal achten, betrachten wir sie alle als gleich, nennen sie Einheiten, und können sie zusammenfassen. Die Thätigkeit dieses Zusammenfassens heisst „Zählen“, und die Formen, welche dadurch entstehen, heissen „Zahlen“. — Eine Zahl ist also der Inbegriff einer Menge von Einheiten.

Eine Zahl, die eine bestimmte Menge von Einheiten ausdrücken soll, (specielle, natürliche Zahl) bezeichnet man durch eine Ziffer, oder durch eine gesetzmässige Zusammenfügung mehrerer Ziffern. (Mit diesen Zahlen beschäftigt sich das gewöhnliche Rechnen).

Eine Zahl, die eine beliebige Menge von Einheiten ausdrücken soll, (allgemeine Zahl) bezeichnet man durch einen Buchstaben (einfache Zahl) oder durch eine gesetzmässige Vereinigung mehrerer Buchstaben (zusammengesetzte Zahl). Mit diesen Zahlen beschäftigt sich die Arithmetik.

Ein Buchstabe kann jede bestimmte Zahl vorstellen, aber nur eine und dieselbe, wenn er in einer zusammengesetzten Zahl mehrmals vorkommt.

Es genügt folglich, die allgemeinen Zahlen zu betrachten, da deren Gesetze auf alle speciellen Zahlen anwendbar sind.

Wenn uns mehrere Zahlen gegeben sind, so achten wir auf die Menge ihrer Einheiten (Grösse der Zahl). Wir können dann die Zahlen entweder nur vergleichen, oder sie nach bestimmten Gesetzen zu neuen Zahlen vereinigen (rechnen).

2. Vergleichung der Zahlen.

2. *Zwei Zahlen.* — Zwei Zahlen (a, b) heissen ungleich, wenn die eine mehr Einheiten enthält als die andere. — $a \geq b$.

Von zwei ungleichen Zahlen heisst diejenige Zahl (a), welche mehr Einheiten enthält, die grössere. — $a > b$.

Diejenige Zahl (b), welche weniger Einheiten enthält, heisst die kleinere. — $b < a$.

Anm. „Gross“ und „klein“, auf Zahlen angewendet, sind bildliche Ausdrücke.

Zwei Zahlen (a, b) heissen gleich, wenn die eine ebenso viele Einheiten enthält als die andere. — $a = b$, oder $b = a$.

Vertauschungsgesetz: Von zwei gleichen Zahlen ^{1.} kann man die eine an die Stelle der anderen setzen. — Denn $a = b$ und $b = a$ bedeuten dasselbe.

Anm. Zwischen zwei Zahlen (a, b) sind nur folgende Grössenbeziehungen möglich: $a > b$; $a = b$; $a < b$.

Der Ausdruck $a = b$ (in welchem statt a und b auch zusammengesetzte Zahlen stehen können) heisst eine Gleichung; a und b heissen die Seiten der Gleichung (rechte, linke).

Folgerung aus dem Vertauschungsgesetz: Man kann die beiden Seiten einer Gleichung mit einander vertauschen.

Wie die Wörter einer Sprache, zu einem Satze zusammengefügt, der Ausdruck einer Aussage oder einer Frage sind, so sind auch die Zahlen, zu einer Gleichung zusammengefügt, der Ausdruck einer mathematischen Wahrheit oder Aufgabe. Im ersten Falle heisst die Gleichung: Formel, und jeder ihrer Buchstaben kann durch eine beliebige Zahl ersetzt werden; im zweiten Falle heisst sie: Bestimmungsgleichung, und einer ihrer Buchstaben wird durch die Werthe der übrigen bestimmt, hat also nicht mehr einen willkürlichen Werth.

Anm. Was ist hiernach $a = b$? was $a = a$? Welche mathematische Aufgabe oder Wahrheit liegt in jeder dieser Gleichungen?

3. Drei Zahlen. — Wir fanden zwischen zwei Zahlen (a, b) die drei Fälle $a > b$, $a = b$, $a < b$. Bei Hinzunahme einer dritten Zahl c kann sein: $b > c$, $b = c$, $b < c$. Es fragt sich nun: Wenn wir a mit b und b mit c verglichen haben, wie ist das Resultat der Vergleichung von a mit c beschaffen? Diese Frage beantwortet der Verstand wie folgt:

1. Wenn $a > b$ und $b > c$, so ist umsomehr $a > c$.
2. » $a > b$ » $b = c$, » » auch $a > c$.
3. » $a > b$ » $b < c$, » kann sein $a > c$.
4. » $a = b$ » $b > c$, » ist auch $a > c$.
5. » $a = b$ » $b = c$, » » » $a = c$.
6. » $a = b$ » $b < c$, » » » $a < c$.
7. » $a < b$ » $b > c$, » kann sein $a < c$.

8. » $a < b$ » $b = c$, » ist auch $a < c$.
 9. » $a < b$ » $b < c$, » » umsomehr $a < c$.

2. Der wichtigste dieser Sätze, Nr. 5, lautet in Worten: Sind zwei Zahlen derselben dritten gleich, so sind sie unter einander gleich.

Anm. Die Sätze 2, 4, 5, 6, 8 folgen auch aus der Anwendung des Vertauschungsgesetzes. — Wie lauten die übrigen Sätze (ausser 5) in Worten? Welche Sätze gestatten denselben Wortausdruck?

Erste Abtheilung. Die einfachen Zahlen.

A. Die absoluten Zahlen.

4. *Uebersicht.* — Wir gehen von der aus Einheiten zusammengesetzten Zahl aus, und untersuchen die mannigfachen Weisen, in denen zwei Zahlen zu einer neuen Zahl vereinigt werden können. — Die beiden gegebenen Zahlen verbinden wir beim Schreiben und Sprechen für jede Art der Vereinigung durch ein besonderes Zeichen und setzen das Resultat der Vereinigung diesem Ausdrucke gleich. Bei jeder neuen Vereinigung (Rechnungsart) führen die gegebenen Zahlen sowohl, wie das Resultat, neue Namen. — Aus der einfachsten Art der Vereinigung zweier Zahlen, welche der Vereinigung von Einheiten entspricht, leiten wir neue Rechnungsarten ab, stellen die Eigenschaften jeder Rechnungsart fest, und wenden zuletzt die Rechnungsarten auf ihre Resultate an. Dabei lassen sich drei Stufen der Vereinigung (Rechnungsstufen) unterscheiden.

Erste Rechnungsstufe.

1. Die Addition.

5. *Vorbemerkung.* — Wir hatten bereits Einheiten zu einer Zahl vereinigt. Sei das Zeichen dieser Vereinigung $+$, so können wir die Bedeutung einer beliebigen Zahl a durch die Gleichung ausdrücken:

$$a = 1 + 1 + 1 + \dots$$

Wir können nun in derselben Weise zwei Zahlen zu einer neuen Zahl vereinigen, in welcher die Einheiten jener beiden Zahlen zusammen enthalten sind. Die neue Zahl ist dann aus

den gegebenen Zahlen geradeso zusammengesetzt, wie eine der letzteren aus den Einheiten. Diese Art der Vereinigung heisst Addition.

6. Erklärungen. — 1) Unter der Summe zweier Zahlen a und b versteht man diejenige Zahl c , welche so viele Einheiten enthält wie a und b zusammen genommen.

Gleichung der Addition: $a + b = c$. (a plus b gleich c .)

2) Die Zahlen a und b heissen Summanden.

3) Die Summe zweier Zahlen bilden, heisst: sie addiren.

Anm. Die der Summenbildung entgegengesetzte Aufgabe ist die Zerlegung einer gegebenen Summe in Summanden. In diesem Falle nennt man die gegebene Summe das Ganze, und die Summanden die Theile. Die Gleichung der Addition kann dann gelesen werden: Das Ganze ist gleich der Summe seiner Theile.

Von zwei durch Addition zu vereinigenden Zahlen kann die eine, a , als erstgegebene, zu vermehrende, die andere, b , als hinzuzufügende Zahl betrachtet werden. In diesen Eigenschaften kann man a und b durch die Namen Augend und Addend unterscheiden, und sagen, es werde b zu a addirt.

7. Eigenschaften der Addition. — 1) Die Summanden 3. können beliebig geordnet werden. — Denn die gleichen Einheiten, die in der Zahl c enthalten sind, können in jede beliebige Reihenfolge gebracht werden (nach dem allgemeinen Vertauschungsgesetz); namentlich können entweder alle aus a , oder alle aus b stammenden Einheiten vorangestellt werden. Es gilt also das

Vertauschungsgesetz: $a + b = b + a$.

Anm. Aus der Geltung des Vertauschungsgesetzes erklärt es sich, dass die durch Addition zu vereinigenden Zahlen nicht einzeln besonderer Namen bedürfen, sondern einen gemeinschaftlichen Namen (Summand) führen.

2) Die Summanden können beliebig zusammen- 4. gefasst werden. — Eine aus den Einheiten dreier Zahlen a , b , c zusammengesetzte Summe kann in zwei Zahlen zerlegt werden, von denen die eine die Einheiten von a und b , die andere diejenigen von c enthält, oder von denen die eine die Einheiten von b und c , die andere diejenigen von a enthält. Da die beiden so gebildeten Ausdrücke dieselbe Menge von Einheiten enthalten, so sind sie einander gleich.

Regel: Jeder aus mehreren Buchstaben bestehende Ausdruck, der als eine einzige Zahl betrachtet werden soll, wird in Klammern () geschlossen.

Demnach gilt also das

Zusammenfassungsgesetz: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Anm. Welche dritte Art der Zusammenfassung ist noch möglich? Wie lassen sich die drei Ausdrücke mit Hilfe des Vertauschungsgesetzes ändern?

8. *Weitere Bemerkungen zur Addition.* — 1) Da in einer aus drei (oder mehr) Summanden bestehenden Summe die Klammerzeichen an beliebige Stellen gesetzt werden dürfen, so kann man sie auch ganz weglassen, also schreiben:

$$(a + b) + c = a + b + c.$$

Der letztere Ausdruck wird gebildet durch fortschreitende Addition, d. h. so, dass man erst b zu a , dann c zu dem erhaltenen Resultate addirt.

2) Wenn $a + b = c$, so ist

$$c > a, c > b;$$

5. d. h.: Die Summe ist grösser als jeder Summand.

3) Wenn $a = c$ und $b = d$, so ist nach 1 *)

$$a + b = c + d,$$

6. mithin: Gleiches zu Gleichem addirt giebt Gleiches.

9. *Rechnung mit Resultaten.* — In der Formel 4

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

kann jede der beiden Seiten als Aufgabe und die jedesmalige andere Seite als Lösung betrachtet werden. Die Aufgabe rechts lässt sich mit ihrer Lösung in der Regel aussprechen:

Addition einer Summe.

7. Eine Summe addirt man zu einer Zahl, indem man ihre Summanden einzeln addirt.

Die Aufgabe links:

Eine Zahl wird zu einer Summe addirt, indem man sie zu einem der Summanden addirt.

Anm. Da man statt $(a + b) + c$ gewöhnlich $a + b + c$ schreibt, so wird durch Lösung der Aufgabe rechts eine Klammer beseitigt, durch Lösung der Aufgabe links dagegen eine Klammer eingeführt. Die erstere Operation ist aber die wichtigere, weil durch sie die Rechnung mit einem Resultate auf diejenige mit seinen einzelnen Bestandtheilen zurückgeführt wird. Es wird daher künftig in ähnlichen Fällen nur diejenige Deutung der Formel hervorgehoben werden, welche eine Klammer beseitigen lehrt.

*) Die einfachen Zahlen beziehen sich im ganzen Buche auf die am Rande stehenden Nummern der Formeln und Regeln. Die Nummern der Abschnitte sind durch Nr. bezeichnet.

Folgerung: Eine Zahl addirt man, indem man ihre Einheiten einzeln addirt.

Aus

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

folgt durch Vertauschung von b und c

$$(a + c) + b = a + (c + b).$$

Da diese Vertauschung die rechte Seite ungeändert lässt, so sind auch die linken Seiten gleich; also

$$(a + b) + c = (a + c) + b.$$

In Worten: Die Reihenfolge, in der man mehrere Zahlen addirt, ist beliebig.

2. Die Subtraction.

10. Vorbemerkung. — In der Aufgabe, die Summe c zweier Zahlen a und b zu bestimmen, waren a und b die gegebenen, c die gesuchte Zahl. Statt dessen kann man auch a oder b als gesuchte, c und b oder c und a als gegebene Zahlen betrachten. Die Lösung dieser beiden neuen Aufgaben würde zwei neue Rechnungsarten erfordern, wenn nicht a und b vertauscht werden könnten, sodass beide Aufgaben durch eine neue Rechnung gelöst werden. — Die eine der beiden Aufgaben heisst: Eine Zahl b zu finden, die, zu einer gegebenen Zahl a addirt, eine andere gegebene Zahl c hervorbringt. Diejenige Vereinigung von c und a , durch welche diese Aufgabe gelöst wird, heisst Subtraction.

11. Erklärungen. 1) Unter der Differenz zwischen zwei Zahlen c und a versteht man diejenige Zahl b , welche man zu a addiren muss, um c zu erhalten. — Wenn

$$a + b = c,$$

so ist die

Gleichung der Subtraction: $c - a = b$ (c minus a gleich b).

Anm. Die zweite Gleichung findet also in der ersten ihre Erklärung und gilt für die nämlichen Zahlenwerthe von a , b und c , wie diese.

2) c heisst Minuend, a Subtrahend.

3) Die Differenz zwischen c und a bilden, heisst: a von c subtrahiren.

12. Eigenschaft der Subtraction. — Minuend und Subtrahend sind nicht vertauschbar (führen daher auch keinen gemeinsamen Namen). Denn Minuend und Subtrahend waren in der Addition resp. Summe und Summand. — Wohl

aber sind Differenz und Subtrahend vertauschbar. Denn aus der Vertauschbarkeit von a und b folgt, dass, wenn

$$c - a = b,$$

auch

$$c - b = a$$

ist. Hieraus geht wieder die Eingangs gemachte Bemerkung hervor, dass die beiden Aufgaben: b zu bestimmen, wenn c und a , a zu bestimmen, wenn c und b gegeben sind, durch dieselbe Rechnung gelöst werden.*)

Anm. Während eine Summe aus beliebig vielen Summanden bestehen konnte, enthält eine Differenz immer nur zwei Glieder. Die Frage nach der beliebigen Zusammenfassung ist dadurch von selbst ausgeschlossen.

13. Weitere Bemerkungen zur Subtraction. — 1) Da die Summe grösser ist als jeder Summand, so muss der Minuend einer Differenz grösser sein als der Subtrahend. Nur unter dieser Bedingung ist die Differenz eine Zahl in dem oben festgestellten Sinne. Ist die Bedingung nicht erfüllt, so muss man, um überhaupt eine Lösung der Aufgabe zu erhalten, den Begriff der Zahl erweitern. Dies wird weiter unten geschehen.

2) Wenn $a = c$ und $b = d$, so ist

$$a - b = c - d,$$

9. mithin: Gleiches von Gleichem subtrahirt giebt Gleiches.

14. Zusammenhang mit der Addition. — Aus jeder der drei Gleichungen:

$$1) a + b = c$$

$$2) c - a = b$$

$$3) c - b = a$$

kann man den Werth des rechts stehenden Buchstabens in die beiden anderen einsetzen. Dies giebt die Formeln:

$$1) \text{ in } 2) (a + b) - a = b; \quad 2) \text{ in } 1) a + (c - a) = c;$$

$$2) \text{ in } 3) c - (c - a) = a; \quad 3) \text{ in } 2) c - (c - b) = b;$$

$$3) \text{ in } 1) (c - b) + b = c; \quad 1) \text{ in } 3) (a + b) - b = a.$$

Die dritte Reihe liefert die Regeln:

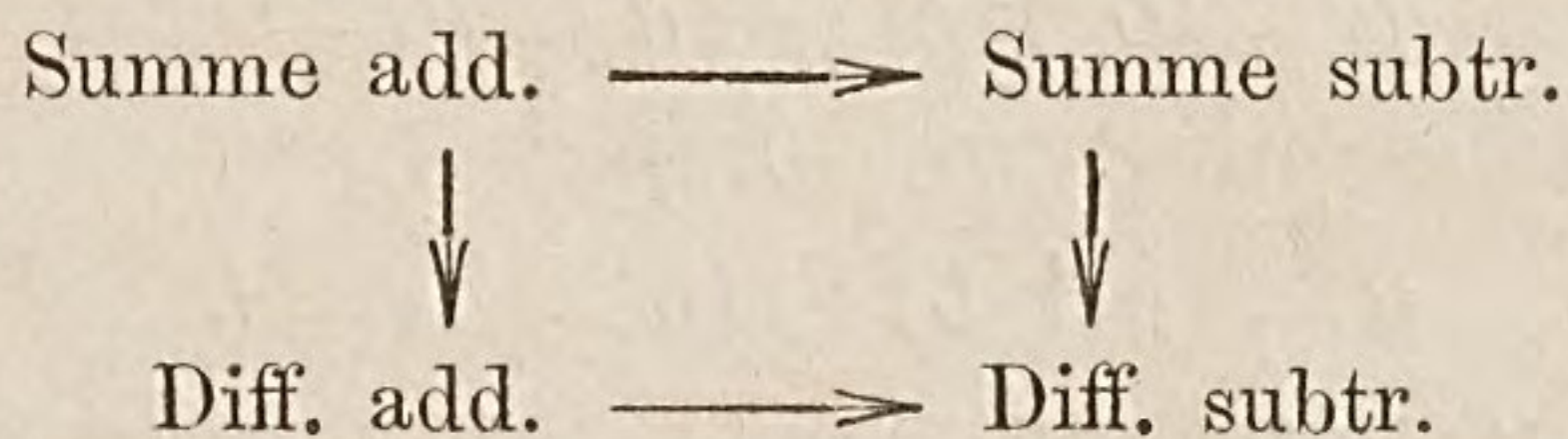
10. Eine Zahl bleibt ungeändert, wenn man eine andere erst zu ihr addirt und dann vom Resultate sub-

*) Stellt man sich die Aufgaben, aus $c - b = a$ die Zahlen c und b zu bestimmen, so ist ersichtlich, dass, da c und b nicht vertauschbar sind, beide Aufgaben durch verschiedene Rechnungen lösbar sein müssen. In der That wird c durch Addition, b durch Subtraction gefunden.

trahirt (oder umgekehrt). Addirt man zu einer Differenz den Subtrahend, so erhält man den Minuend. — Subtrahirt man von einer Summe den einen Summand, so erhält man den andern. — Daher besteht die Subtraction in der Fortschaffung eines Summanden.

Anm. Welche Regeln liegen in den beiden ersten Reihen? — Vermöge der ersten Regel sind Addition und Subtraction entgegengesetzte Rechnungsarten.

15. Rechnung mit Resultaten. — Im Anschluss an die in dem Abschnitt „Addition“ gelöste Aufgabe: eine Summe zu addiren, lassen sich die Fragen stellen: Wie addirt man eine Differenz? Wie subtrahirt man eine Summe und eine Differenz? Um die beiden ersten Fragen zu beantworten, geht man von der Addition einer Summe aus und macht vermittelt einer ersten Methode den Uebergang von der Summe zur Differenz, vermittelt einer zweiten den Uebergang von der Addition zur Subtraction. Von jeder der beiden so erhaltenen Formeln kann man dann zur dritten Formel durch eine dieser beiden Methoden gelangen, wie folgendes Schema zeigt:



Addition einer Differenz.

$a + (b + c) = a + b + c;$ 7. Eine Differenz addirt 11.
 Sei $(b + c) = x; b = (x - c);$ man zu einer Zahl, in-
 $a + x = a + (x - c) + c;$ 1. dem man den Minuend
 addirt und den Sub-
 $(a + x) - c = a + (x - c).$ 9. 10. trahend subtrahirt.

Anm. Welche Regel erhält man, wenn man die linke Seite $(a + x) - c$ als Aufgabe betrachtet?

Die dritte Reihe kann nach 8 geschrieben werden:

$$(a + x) = (a + c) + (x - c),$$

d. h.: Eine Summe bleibt ungeändert, wenn man dieselbe Zahl zu dem einen Summand addirt und von dem andern subtrahirt. — Oder:

$$(x - c) = (x + a) - (c + a);$$

d. h.: Eine Differenz bleibt ungeändert, wenn man dieselbe Zahl zu Minuend und Subtrahend addirt. — Oder:

$$(a + c) = (x + a) - (x - c);$$

d. h.?

Aus

$$(a + x) - c = a + (x - c)$$

folgt durch Vertauschung der Summanden auf beiden Seiten:

$$(x + a) - c = (x - c) + a;$$

12. d. h.: Die Reihenfolge, in der man mehrere Zahlen addirt und subtrahirt, ist beliebig.

Anm. Welche Regel ergibt sich, wenn man die rechte Seite als Aufgabe betrachtet?

Subtraction einer Summe.

13. $a + (b + c) = a + b + c.$ 7. Eine Summe subtra-
 $a + (b + c) - b = a + c + b - b.$ 9. 8. hirt man von einer
 $a - b + (b + c) = a + c.$ 12. 10. Zahl, indem man die
 $a - b - c + (b + c) = a.$ 9. 12. 10. Summanden einzeln
 $(a - b) - c = a - (b + c).$ 9. 10. subtrahirt.

Anm. Welche Regel erhält man, wenn man die linke Seite als Aufgabe betrachtet?

Folgerung: Eine Zahl subtrahirt man, indem man ihre Einheiten einzeln subtrahirt.

Aus

$$a - (b + c) = (a - b) - c$$

folgt durch Vertauschung von b und c :

$$a - (c + b) = (a - c) - b.$$

Da diese Vertauschung die linke Seite ungeändert lässt, so sind auch die rechten Seiten gleich, also:

$$(a - b) - c = (a - c) - b;$$

14. d. h.: Die Reihenfolge, in der man mehrere Zahlen subtrahirt, ist beliebig.

Subtraction einer Differenz.

15. $a - (b + c) = a - b - c.$ 13. Eine Differenz sub-
 Sei $(b + c) = x; b = (x - c).$ trahirt man von einer
 $a - x = a - (x - c) - c.$ 1. Zahl, indem man den
 $(a - x) + c = a - (x - c).$ 6. 10. Minuend subtrahirt
 und den Subtrahend
 addirt.

Anm. Welche Regel erhält man, wenn man die linke Seite als Aufgabe betrachtet? — Von nun an wird dem Leser selbst überlassen werden, sich in den entsprechenden Fällen diese Frage zu stellen.

Die dritte Reihe kann nach 14 geschrieben werden:

$$(a - x) = (a - c) - (x - c);$$

d. h.: Eine Differenz bleibt ungeändert, wenn man dieselbe Zahl von Minuend und Subtrahend subtrahirt. — Oder:

$$(a - c) = (a - x) + (x - c);$$

d. h.? — Oder:

$$(x - c) = (a - c) - (a - x);$$

d. h.?

Folgerung. Nennt man eine Klammer, vor welcher + steht, eine Plusklammer, eine solche, vor welcher — steht, eine Minusklammer, so lassen sich die Regeln 7, 11, 13, 15, wie aus den zugehörigen Formeln ersichtlich ist, durch folgende mechanische Regel ersetzen:

Eine Plusklammer kann beliebig gesetzt und weg- 16. gelassen werden, eine Minusklammer nur dann, wenn man gleichzeitig alle in der Klammer stehenden Plus- und Minuszeichen umkehrt (d. h. — in + verwandelt und + in —).

16. Erweiterungen. 1) Setzt man in den Formeln 7, 11, 13, 15 $a = d + e$, und $a = d - e$, so erhält man die Ausführung der Rechnungen erster Stufe zwischen Summen und Differenzen. Von den 8 sich ergebenden Formeln lautet die erste:

$$(d + e) + (b + c) = [(d + e) + b] + c = d + e + b + c.$$

2) Setzt man in denselben Formeln $c = d + e$, und $c = d - e$, so erhält man die Ausführung der Rechnungen erster Stufe mit Resultaten, deren Theile wieder ein Resultat enthalten. Die erste dieser 8 Formeln lautet:

$$a + [b + (d + e)] = (a + b) + (d + e).$$

Die links gestellte Aufgabe ist also auf die vorher gelöste zurückgeführt. Man sieht hierbei, dass erst die äussere, dann die innere Klammer gelöst worden ist. Ebenso wird man, mit Benutzung der Regel 16, verfahren, wenn noch mehrere Klammern zu lösen sind, von denen immer eine in der anderen enthalten ist. (Aufgaben: Hofmann,^{*)} 2. Erster Abschnitt. I. — Bardey,^{**)} IV.)

Zweite Rechnungsstufe.

3. Die Multiplication.

17. Vorbemerkung. — Die Einheiten, welche wir oben zu einer Zahl vereinigten, waren einander gleich; die Zahlen dagegen, deren Summe wir bildeten, waren es im Allgemeinen

^{*)} Sammlung v. Aufg. a. d. Arithm. u. Algebra. Bayreuth 1874 bei Grau.

^{**)} Methodisch geordnete Aufgabensammlung. Leipzig bei Teubner.

nicht. Nehmen wir nun an, eine Summe bestehe aus lauter gleichen Summanden, so brauchen wir, um diese Summe zu bilden, nur zwei Zahlen zu kennen, nämlich den wiederholten Summand und die Anzahl der Summanden. Diese Art der Summenbildung kann also als eine neue Art der Vereinigung zweier Zahlen betrachtet werden. Dieselbe heisst Multiplication.

18. *Erklärungen.* — 1) Unter dem Producte c zweier Zahlen a und b versteht man eine Summe aus a Summanden, deren jeder gleich b ist. (Kurz: Ein Product ist eine Summe aus lauter gleichen Summanden.)

17.
$$ab = b + b + \dots (a \text{ mal})$$

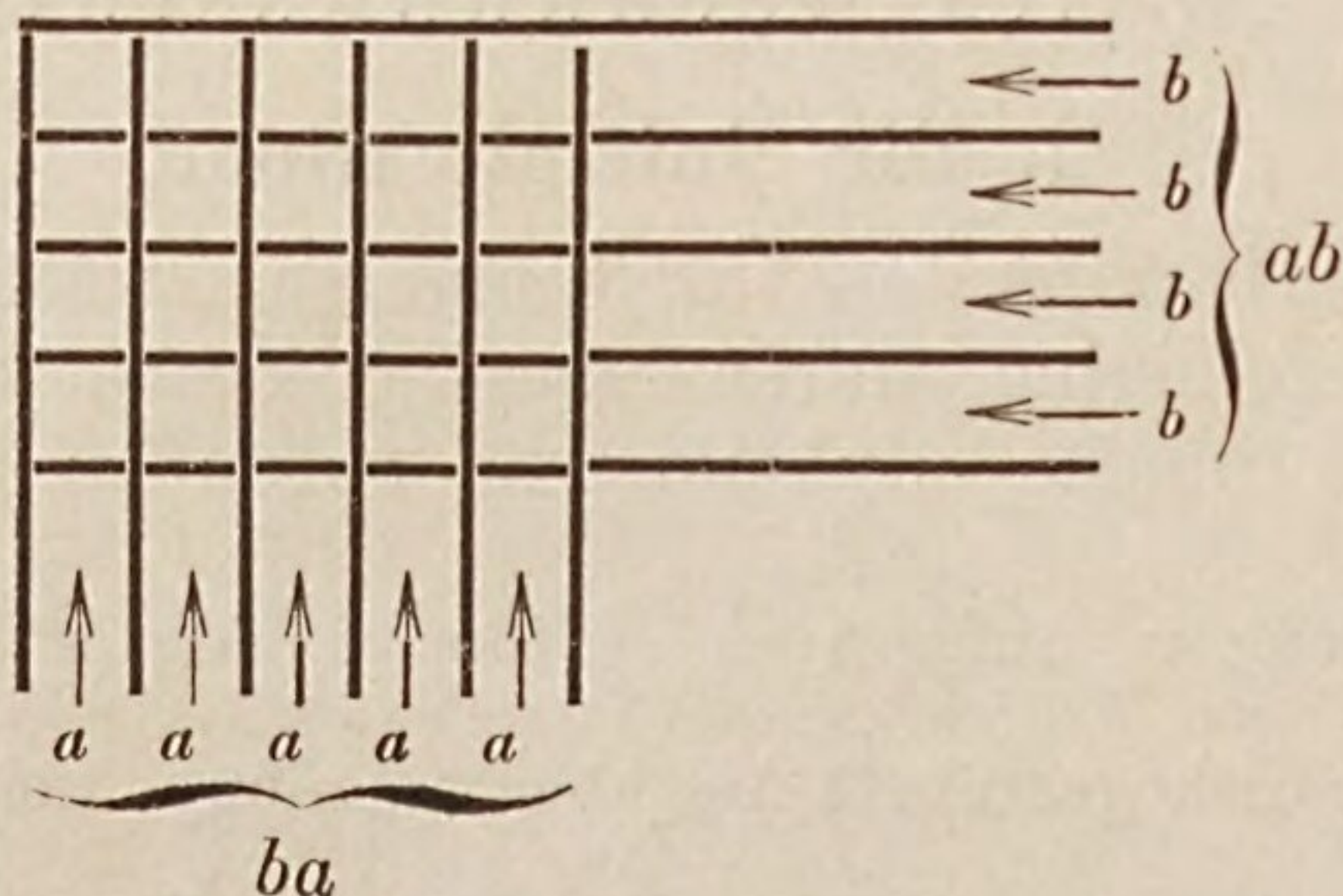
Gleichung der Multiplication: $ab = c$ (a (mal) b gleich c).

2) Der wiederholte Summand, b , heisst Multiplicand, die Anzahl der Summanden, a , Multiplikator, beide Zahlen gemeinsam: Factoren.

3) Das Product zweier Zahlen a und b bilden, heisst: a mit b multipliciren.

Anm. Die Multiplication zweier allgemeiner Zahlen wird durch einfaches Nebeneinanderschreiben bezeichnet. Die Verbindung ab wird ursprünglich gelesen: a -mal b , wobei also die Silbe „mal“ mit der vorangehenden Zahl ein Wort bildet. (Ebenso bei speciellen Zahlen, z. B.: einmal, dreimal.) Da aber, wie sogleich gezeigt werden wird, a und b vertauscht werden können, so pflegt man die Silbe „mal“ als selbständiges, zwischen a und b gesetztes Wort zu betrachten (ebenso wie „plus“ in der Addition), welches dadurch seine ursprüngliche Bedeutung verliert und nur noch zur Bezeichnung der Multiplication dient.

18. 19. *Eigenschaften der Multiplication.* — 1) Die Factoren können beliebig geordnet werden. — Denn da $ab = b + b + \dots (a \text{ mal})$ ist, so können wir alle in dem Producte ab enthaltenen Einheiten in a Horizontalreihen ordnen, von denen jede b Einheiten enthält (wie die nebenstehende Figur zeigt, in der die Einheiten durch Quadrate dargestellt sind).



Gleichzeitig aber ordnen sich die Einheiten in b Verticalreihen, jede mit a Einheiten, sodass diese zweite Zählung das Product ba giebt. Da dies zweite Product dieselben Einheiten enthält, wie das erste, nur anders gezählt, so gilt das

Vertauschungsgesetz: $ab = ba$.

Anm. Die Geltung dieses Gesetzes rechtfertigt die Aufstellung des gemeinsamen Namens „Factor“ für Multiplicand und Multiplicator. Diese letztern Benennungen sind aber nicht überflüssig, da die Vertauschung unzulässig ist, sobald die beiden Zahlen aus verschiedenartigen Einheiten abgeleitet sind, was in der angewandten Arithmetik vorkommen kann. Ist nämlich der Multiplicand eine benannte Zahl, z. B. 7 Meter (also nicht aus der Zahleneinheit, sondern aus der Längeneinheit „Meter“ abgeleitet), so kann man zwar das Product bilden: dreimal Siebenmeter, nicht aber: Siebenmeter-mal drei; d. h.: es gilt hier keine Vertauschung von Multiplicand und Multiplicator, Vergl. Nr. 25 Anm.

2) Die Factoren können beliebig zusammengefasst 19. werden. — Denn setzt man in der Figur zu 18 statt jeder Einheit die Zahl c , so giebt jede Horizontalreihe bc Einheiten, also alle a Horizontalreihen $a(bc)$ Einheiten. Jede Verticalreihe aber giebt ac Einheiten, also alle b Verticalreihen $b(ac)$ Einheiten. Demnach gilt das

Zusammenfassungsgesetz: $a(bc) = b(ac)$

oder mit Benutzung von 18:

$$a(bc) = c(ab) = (ab)c.$$

20. *Weitere Bemerkungen zur Multiplication.* — 1) Da in einem aus drei (oder mehr) Factoren bestehenden Producte die Klammerzeichen an beliebiger Stelle gesetzt werden dürfen, so kann man sie auch ganz weglassen und schreiben:

$$(ab)c = abc;$$

d. h.: bei fortschreitender Multiplication wird erst a mit b , dann das Product mit c multiplicirt.

2) Wenn $ab = c$, so ist

$$c > a \text{ und } c > b;$$

d. h.: Das Product ist grösser als jeder Factor; ferner 20. ist dasselbe ein Vielfaches jedes Factors.

3) Wenn $a = c$ und $b = d$, so ist nach 1

$$ab = cd,$$

mithin: Gleiches mit Gleichem multiplicirt giebt 21. Gleiches.

21. *Rechnung mit Resultaten.* — Wie in der ersten Rechnungsstufe aus einer Grundformel (7) die übrigen drei Formeln

(11, 13, 15) abgeleitet wurden, so ist es auch hier der Fall, nur dass man 2 Grundformeln aufstellen muss, da die Rechnungen nicht bloß an einem Resultate erster, sondern auch an einem solchen zweiter Stufe ausgeführt werden können. Die Methoden der Ableitung sind dieselben, welche bereits oben angewendet wurden.

A. Rechnung mit Resultaten 1. Stufe.

Multiplication einer Summe.

22. $c(a+b) = (a+b) + (a+b) + \dots (c \text{ mal})$
 $= a + a + \dots (c \text{ mal})$
 $+ b + b + \dots (c \text{ mal})$
 $c(a+b) = ca + cb$
 oder
 $(a+b)c = ac + bc$
17. Eine Summe multiplicirt man mit einer Zahl, indem man die Summanden einzeln multiplicirt und die Producte addirt.
 16. 3.
 17.
 18.

Multiplication einer Differenz.

23. $(a+b)c = ac + bc.$
 Sei
 $a+b = x; a = x - b.$
 $xc = (x-b)c + bc.$
 $xc - bc = (x-b)c.$
22. Eine Differenz multiplicirt man mit einer Zahl, indem man ihre Glieder einzeln multiplicirt und das Product des Subtrahend von dem des Minuend subtrahirt.
 9. 10.

Betrachtet man in 22 die rechte, in 23 die linke Seite der Formel als Aufgabe, so erhält man die Regel: Producte mit einem gemeinsamen Factor werden addirt oder subtrahirt, indem man den gemeinsamen Factor mit der Summe oder Differenz der nicht gemeinsamen Factoren multiplicirt.

Dieses Verfahren wird auch Heraussetzung des gemeinsamen Factors genannt.

Also nur bedingungsweise kann eine Summe oder Differenz von Producten als Product dargestellt werden. Wie diese Bedingung nachträglich in einer Aufgabe erfüllt werden kann, werden wir weiter unten sehen. (S. Anm. zu 33.) (Aufgaben: Hofmann 2. Erster Abschn. II, 33—53, 83—121.)

Erweiterungen. Setzt man in den Formeln 22 und 23 $c = d + e$ und $c = d - e$, so erhält man nach Lösung der Klammern mittelst derselben Formeln:

- 1) $(a + b)(d + e) = ad + ae + bd + be;$
- 2) $(a + b)(d - e) = ad - ae + bd - be;$
- 3) $(x - b)(d + e) = xd + xe - bd - be;$
- 4) $(x - b)(d - e) = xd - xe - bd + be;$

d. h.: Summen und Differenzen werden mit einander 25. multiplicirt, indem man jedes Glied der einen mit jedem Gliede der andern multiplicirt, und alle Producte aus zwei Summanden oder Subtrahenden addirt, dagegen alle Producte aus einem Summand und einem Subtrahend subtrahirt.

22. B. Rechnung mit Resultaten 2. Stufe.

Formel 19: $a(bc) = (ab)c$ enthält die

Multiplication mit einem Producte.

Eine Zahl wird mit einem Producte multiplicirt, 26. indem man sie mit den Factoren der Reihe nach multiplicirt.

Betrachtet man die rechte Seite von 19 als Aufgabe, so ergibt sich die Regel: Ein Product wird mit einer Zahl multiplicirt, indem man einen Factor mit ihr multiplicirt.

Aus

$$(ab)c = a(bc)$$

folgt durch Vertauschung von b und c

$$(ac)b = a(cb).$$

Da diese Vertauschung die rechte Seite ungeändert lässt, so sind auch die linken Seiten gleich, also:

$$(ab)c = (ac)b.$$

In Worten: Die Reihenfolge, in der man mit mehreren 27. Zahlen multiplicirt, ist beliebig. (Aufgaben: Hofmann 2. Erster Abschn. II, 1—16, 54—60; III, 1—66, 115—137. — Bardey VI.)

4. Die Division.

23. *Vorbemerkung.* — Wie aus der Gleichung der Addition, $a + b = c$, so gehen auch aus derjenigen der Multiplication $ab = c$ zwei neue Aufgaben dadurch hervor, dass man entweder a oder b als gesuchte, b und c oder a und c als gegebene Zahlen betrachten kann. Auch hier bewirkt die Vertauschbarkeit von a und b , dass beide Aufgaben durch eine neue Rechnung ge-

löst werden. Die eine dieser Aufgaben wird also lauten: Eine Zahl b zu finden, die, mit einer gegebenen Zahl a multiplicirt, eine andere gegebene Zahl c hervorbringt. Diejenige Vereinigung von c und a , deren Resultat b ist, heisst Division.

24. Erklärungen: 1) Unter dem Quotienten zwischen zwei Zahlen c und a versteht man diejenige Zahl b , mit welcher man a multipliciren muss, um c zu erhalten. — Wenn

$$ab = c,$$

so ist die

$$\text{Gleichung der Division: } \frac{c}{a} = b \text{ (} c \text{ durch } a \text{ gleich } b \text{).}$$

2) c heisst Dividend, a Divisor.

3) Den Quotienten zwischen c und a bilden, heisst: c durch a dividiren.

Anm. Ein in natürlichen Zahlen ausgedrückter Quotient wird gewöhnlich „Bruch“ genannt, sein Dividend „Zähler,“ sein Divisor „Nenner“.

25. Eigenschaft der Division. — Dividend und Divisor sind nicht vertauschbar. — Wohl aber sind Quotient und Divisor vertauschbar. Denn aus der Vertauschbarkeit von a und b folgt, dass, wenn

$$\frac{c}{a} = b,$$

auch

$$\frac{c}{b} = a$$

ist. Durch letztere Gleichung ist die zweite der oben erwähnten Aufgaben gelöst, nämlich a zu bestimmen, wenn c und b gegeben sind.

Anm. Sind die Factoren eines Productes nicht vertauschbar (vgl. Anm. in Nr. 19), so werden die beiden Aufgaben: a zu bestimmen, wenn c und b , und b zu bestimmen, wenn c und a gegeben sind, verschiedene Rechnungsarten erfordern. So führt z. B. die a. a. O. gestellte Aufgabe: „dreimal sieben Meter = 21 Meter“ einerseits auf die Bestimmung der Zahl „Sieben Meter“, andererseits auf die Bestimmung der Zahl „drei“. Die erste Aufgabe wird durch Theilung, die zweite durch Messung gelöst, sodass man erhält:

$$21 \text{ Meter, getheilt durch } 3, = 7 \text{ Meter.}$$

$$21 \text{ Meter, gemessen durch } 7 \text{ Meter, } = 3.$$

26. Weitere Bemerkungen zur Division. — 1) Da das Product nicht nur grösser ist als jeder Factor, sondern auch ein Vielfaches jedes Factors, so muss der Dividend ein Viel-

faches des Divisors sein. Nur unter dieser Bedingung ist der Quotient eine Zahl in dem oben festgestellten Sinne. — Die Division ist demnach nur eine wiederholte Subtraction, bei welcher die Zahl der Subtrahenden oder die Grösse eines derselben bestimmt wird.

2) Wenn $a = c$, und $b = d$, so ist

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

mithin: Gleiches durch Gleiches dividirt giebt Gleiches. 28.

27. Zusammenhang mit der Multiplication. — Aus jeder der drei Gleichungen:

$$1) ab = c; 2) \frac{c}{a} = b; 3) \frac{c}{b} = a$$

kann man den Werth des rechts stehenden Buchstabens in die beiden andern einsetzen. (Vgl. die entsprechende Stelle in der Subtraction). Dies giebt 6 Formeln, von denen die wichtigsten sind:

$$3) \text{ in } 1) \frac{c}{b} b = c; 1) \text{ in } 3) \frac{ab}{b} = a.$$

In Worten: Eine Zahl bleibt ungeändert, wenn man sie 29. erst mit einer anderen multiplicirt, und dann durch dieselbe dividirt (oder umgekehrt).

Oder: Multiplicirt man einen Quotienten mit dem Divisor, so erhält man den Dividend. — Dividirt man ein Product durch den einen Factor, so erhält man den andern. — Daher besteht die Division in der Fortschaffung eines Factors.

Anm. Vermöge der ersten Regel sind Multiplication und Division entgegengesetzte Rechnungsarten. — In zusammengesetzten Rechnungen vertritt der Divisionsstrich die Stelle der Klammer.

28. Rechnung mit Resultaten. — Die Rechnung mit Resultaten 1. Stufe ergiebt sich aus dem entsprechenden Abschnitt der Multiplication, indem man in den dortigen Formeln den Uebergang vom Product zum Quotienten macht. Die Rechnung mit Resultaten 2. Stufe stimmt in den Methoden genau mit der Subtraction überein, nur dass die dort angewandten Zeichen der Addition und Subtraction hier durch diejenigen der Multiplication und Division zu ersetzen sind. Der Zusammenhang der Formeln 26 (19) und 7 (4) kann bereits als Beispiel hierfür dienen.

A. Rechnung mit Resultaten 1. Stufe.

Division einer Summe.

$$30. \quad (a + b)c = ac + bc.$$

$$\text{Sei} \quad ac = x; \quad a = \frac{x}{c}$$

$$\text{und} \quad bc = y; \quad b = \frac{y}{c}.$$

$$\left(\frac{x}{c} + \frac{y}{c} \right) c = x + y;$$

$$\frac{x}{c} + \frac{y}{c} = \frac{x + y}{c}. \quad 28. 29.$$

22. Eine Summe dividirt man durch eine Zahl, indem man die Summanden einzeln dividirt und die Quotienten addirt.

Division einer Differenz.

$$31. \quad \frac{x - y}{c} = \frac{x}{c} - \frac{y}{c}.$$

$$\text{Sei} \quad x - y = z; \quad x = z + y.$$

$$\frac{z}{c} = \frac{z + y}{c} - \frac{y}{c}.$$

$$\frac{z}{c} - \frac{y}{c} = \frac{z}{c}.$$

30. Eine Differenz dividirt man durch eine Zahl, indem man ihre Glieder einzeln dividirt und den Quotienten des Subtrahend von dem des Minuend subtrahirt.

9. 10.

Anm. 31 ist auch aus 23 abzuleiten, ebenso wie 30 aus 22.

32. Betrachtet man in 30 und 31 die linke Seite der Formel als Aufgabe, so erhält man die Regel: Quotienten mit gleichem Divisor werden addirt oder subtrahirt, indem man die Summe oder Differenz der Dividenden durch den Divisor dividirt. (Vgl. die Bemerkung zu 24.)

Anm. Setzt man in 22 nur $ac = x$, $a = \frac{x}{c}$, und in 23 nur $xc = y$,

$x = \frac{y}{c}$, oder $bc = z$, $b = \frac{z}{c}$, so erhält man die Formeln:

$$\left(\frac{x}{c} + b \right) c = x + bc; \quad y - bc = \left(\frac{y}{c} - b \right) c; \quad xc - z = \left(x - \frac{z}{c} \right) c;$$

und hieraus nach 28 und 29:

$$\frac{x}{c} + b = \frac{x + bc}{c}; \quad \frac{y - bc}{c} = \frac{y}{c} - b; \quad \frac{xc - z}{c} = x - \frac{z}{c}.$$

Diese Formeln zeigen, wie eine Zahl durch Addition oder Subtraction mit einem Producte oder Quotienten so vereinigt werden kann, dass das Resultat wieder ein Product oder Quotient ist.

Die den Aufgaben 30 und 31 entsprechenden Aufgaben: Eine Zahl durch eine Summe oder Differenz zu dividiren, finden einst-

weilen nur bedingungsweise ihre Lösung, nämlich, wenn man 28 und 29 auf 22 und 23 anwendet, durch die Formeln:

$$\frac{ac + bc}{a + b} = c; \quad \frac{xc - bc}{x - b} = c.$$

29. B. Rechnung mit Resultaten 2. Stufe.

Multiplication mit einem Quotienten.

$$a(bc) = abc.$$

Sei $bc = x; \quad b = \frac{x}{c};$

$$ax = a \cdot \frac{x}{c} \cdot c$$

$$\frac{ax}{c} = a \frac{x}{c}.$$

26. Eine Zahl wird mit 33. einem Quotienten multiplicirt, indem man sie mit dem Dividend multiplicirt und durch den Divisor dividirt.

28. 29.

Anm. Betrachtet man die linke Seite als Aufgabe, so erhält man die Regel: Ein Product wird durch eine Zahl dividirt, indem man einen Factor dividirt.

Die dritte Reihe kann geschrieben werden (nach 27):

$$ax = (ac) \frac{x}{c}, \text{ oder: } \frac{x}{c} = \frac{ax}{ac}, \left(\text{oder: } ac = \frac{ax}{x|c} \right);$$

d. h.: Ein Product bleibt ungeändert, wenn man den einen Factor mit einer Zahl multiplicirt und den andern durch dieselbe dividirt. — Ein Quotient bleibt ungeändert, wenn man Dividend und Divisor mit derselben Zahl multiplicirt (den Quotienten erweitert). (In jeder dieser 3 Formeln kann noch von jedem Product auf doppelte Weise der Uebergang zum Quotienten gemacht werden.)

Vermöge dieser beiden Regeln kann man Producten, die keinen gleichen Factor, und Quotienten, die keinen gleichen Divisor haben, einen solchen dadurch geben, dass man sie mit derselben Zahl multiplicirt und dividirt. So ist

$$ab + cd = (ac) \frac{b}{c} + (ac) \frac{d}{a} = ac \left(\frac{b}{c} + \frac{d}{a} \right); \quad 24.$$

$$ab - cd = (ac) \frac{b}{c} - (ac) \frac{d}{a} = ac \left(\frac{b}{c} - \frac{d}{a} \right); \quad 24.$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{db} = \frac{ad + bc}{bd}; \quad 32.$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{cb}{db} = \frac{ad - bc}{bd}. \quad 32.$$

Hiermit ist die in 24 und 32 nur bedingungsweise bewirkte Addition und Subtraction von Producten und Quotienten allgemein ausgeführt. (Directe Ableitung der letzten beiden Formeln aus den ersten beiden!)

Aus

$$\frac{ax}{c} = a \frac{x}{c}$$

folgt durch Vertauschung der Factoren auf beiden Seiten:

$$\frac{xa}{c} = \frac{x}{c} a;$$

34. d. h.: Die Reihenfolge, in der man mit mehreren Zahlen multiplicirt und dividirt, ist beliebig.

Division durch ein Product.

35. $a(bc) = abc$
 $\frac{a(bc)}{b} = \frac{acb}{b}$

$$\frac{a}{b}(bc) = ac$$

$$\frac{a|b}{c}(bc) = a$$

$$\frac{a|b}{c} = \frac{a}{bc}$$

26.

28. 27.

34. 29.

28. 34. 29.

28. 29.

Eine Zahl wird durch ein Product dividirt, indem man sie durch die Factoren der Reihe nach dividirt.

Anm. Betrachtet man die linke Seite als Aufgabe, so erhält man die Regel: Ein Quotient wird durch eine Zahl dividirt, indem man den Divisor mit der Zahl multiplicirt.

Aus

$$\frac{a}{bc} = \frac{a|b}{c}$$

folgt durch Vertauschung von b und c :

$$\frac{a}{cb} = \frac{a|c}{b}.$$

Da diese Vertauschung die linke Seite ungeändert lässt, so sind auch die rechten Seiten gleich, also:

$$\frac{a|b}{c} = \frac{a|c}{b};$$

36. d. h.: Die Reihenfolge, in der man durch mehrere Zahlen dividirt, ist beliebig.

Division durch einen Quotienten.

37. $\frac{a}{bc} = \frac{a|b}{c}.$

Sei $bc = x$; $b = \frac{x}{c}$;

$$\frac{a}{x} = \frac{a}{x|c} | c$$

$$\frac{a}{x} c = \frac{a}{x|c}$$

35.

21. 29.

Eine Zahl wird durch einen Quotienten dividirt, indem man sie durch den Dividend dividirt und mit dem Divisor multiplicirt.*)

*) Die Formeln 26, 33, 35, 37 gehen auch aus 7, 11, 13, 15 hervor,

Anm. Betrachtet man die linke Seite als Aufgabe, so erhält man die Regel: Ein Quotient wird mit einer Zahl multiplicirt, indem man den Divisor durch die Zahl dividirt.

Die dritte Reihe kann (nach 37) geschrieben werden:

$$\frac{a}{x} = \frac{a}{c} \Big| \frac{x}{c}, \text{ oder: } \frac{a}{c} = \frac{a}{x} \cdot \frac{x}{c}, \text{ oder: } \frac{x}{c} = \frac{a}{c} \Big| \frac{a}{x}.$$

Die erste dieser Formeln giebt die Regel: Ein Quotient bleibt ungeändert, wenn man Dividend und Divisor durch dieselbe Zahl dividirt (den Quotienten kürzt).

30. Erweiterungen. 1) Setzt man in den Formeln 26, 33, 35, 37 $a = de$ und $a = \frac{d}{e}$, so erhält man die Ausführung der Rechnungen 2. Stufe zwischen Producten und Quotienten. Von den 8 sich ergebenden Formeln lautet die erste:

$$(de)(bc) = [(de)b]c.$$

Von den übrigen verdienen noch die beiden, welche die Multiplication und Division zwischen 2 Quotienten behandeln, wegen ihrer Anwendungen auf specielle Zahlen Erwähnung. Man erhält:

$$\begin{array}{ccccc} \frac{d}{e} \cdot \frac{x}{c} = \frac{d | e \cdot x}{c} = \frac{dx | e}{c} = \frac{dx}{ec} & & & & \\ (33) & (34) & (35) & & \\ \frac{d}{e} \Big| \frac{x}{c} = \frac{d | e}{x} c = \frac{d}{ex} c = \frac{dc}{ex} & & & & \\ (37) & (35) & (34) & & \end{array}$$

2) Setzt man in denselben Formeln $c = de$ und $c = \frac{d}{e}$, so erhält man die Ausführung der Rechnungen 2. Stufe mit Resultaten, deren Theile wieder ein Resultat enthalten. Die erste dieser 8 Formeln lautet:

$$a[b(de)] = (ab)(de).$$

Die links gestellte Aufgabe ist also auf die vorher gelöste zurückgeführt.

Anm. Die letzten Formeln von 33 an unterscheiden sich von den entsprechenden Formeln der Subtraction (von 11 an) nur dadurch, dass statt der Zeichen der Addition und Subtraction resp. diejenigen der Multiplication und Division stehen. Wendet man als Divisionszeichen den Doppelpunkt (:) an, so stehen auch hier alle Zahlen in horizontaler Reihe, und die Lösung der Klammern erfolgt nach denselben Gesetzen, die am Schluss der 1. Rechnungsstufe gegeben wurden.

(Aufgaben: Hofmann, 2. Erster Abschnitt II. 17—32, 61—82, III. 71—114, IV. V. VI. — Bardey, VII—X.)

wenn man die Zeichen der Addition und der Subtraction resp. durch die der Multiplication und Division ersetzt.

Dritte Rechnungsstufe.

5. Die Potenzirung.

31. Vorbemerkung. — Da ein Product ebenso wie eine Summe aus beliebig vielen Zahlen zusammengesetzt sein kann, so kann man auch hier den speciellen Fall annehmen, dass alle diese Factoren einander gleich seien, und den Werth des Productes als Resultat einer Vereinigung zwischen einem Factor und der Anzahl der Factoren betrachten. Diese Vereinigung heisst Potenzirung.

32. Erklärungen. — 1) Unter der a^{ten} Potenz c einer Zahl b versteht man ein Product aus a Factoren, deren jeder gleich b ist. (Kurz: Eine Potenz ist ein Product aus lauter gleichen Factoren.)

38.
$$b^a = bbb \dots (a \text{ mal}).$$

Gleichung der Potenzirung: $b^a = c$ (b hoch a gleich c).

2) Der wiederholte Factor, b , heisst Grundzahl, die Anzahl der Factoren, a , Exponent.

3) Die a^{te} Potenz einer Zahl b bilden, heisst: b mit a potenziren.

Anm. a heisst auch der Grad der Potenz, daher b^a eine Potenz vom Grade a .

33. Eigenschaft der Potenzirung. — Grundzahl und Exponent sind im Allgemeinen nicht vertauschbar. — Dies lehrt jedes Zahlenbeispiel. Nur $2^4 = 4^2$ macht eine Ausnahme.*)

39. **34. Weitere Bemerkungen zur Potenzirung.** — 1) Die Potenz ist grösser als die Grundzahl, ist ein Vielfaches

*) Der Beweis für die Richtigkeit dieses Satzes (denn eine Erläuterung durch Zahlenbeispiele ist kein Beweis) erfordert Rechnungen, die an dieser Stelle noch nicht vorgekommen sind. Gleichwohl möge er hier folgen. Sei $\frac{a}{b} = m$ (wobei m eine ganze oder gebrochene Zahl sein kann); also $a = mb$; dann geht die Formel $a^b = b^a$ über in $(mb)^b = b^{mb}$, oder $mb = b^m$, oder $m = b^{m-1}$, oder $b = m^{m-1} \sqrt[m]{m}$; $a = m^{m-1} \sqrt[m]{m}$. Es müssen also a und b diese besondere Form haben, um der Formel $a^b = b^a$ zu genügen. Mithin gilt dieselbe nicht allgemein. Sollen ferner a und b Zahlen in dem bisherigen Sinne sein, so muss $m - 1 = 1$, d. h. $m = 2$, $b = 2$, $a = 4$ sein; d. h.: 2 und 4 sind die einzigen Zahlen, für welche $a^b = b^a$ ist.

derselben, und besteht aus lauter gleichen Factoren von der Grösse der Grundzahl.

2) Wenn $a = c$ und $b = d$, so ist

$$b^a = d^c,$$

mithin: Gleiches mit Gleichem potenzirt giebt Gleiches. 40.

Anm. Da Grundzahl und Exponent nicht vertauschbar sind, so können auch nicht mehr als zwei Zahlen durch Potenzirung verbunden werden. Denn a^{b^c} hat verschiedene Werthe, je nachdem es $(a^b)^c$ oder $a^{(b^c)}$ bedeutet. (Nur 2^{2^2} bildet eine Ausnahme.) Folglich kann man von der Potenzirung nicht wieder auf demjenigen Wege zu einer neuen Rechnungsart gelangen, welcher von der Addition zur Multiplication und von dieser zur Potenzirung führte.

35. Rechnung mit Resultaten. — Da die Potenzirung mit Resultaten 1., 2. und 3. Stufe ausgeführt werden kann, und da es einen Unterschied macht, ob das Resultat in der Grundzahl oder im Exponenten steht, so kann man 6 Grundaufgaben stellen, nämlich:

$$c^{a+b}, (a+b)^c; (ab)^c, c^{ab}; (c^a)^b, b^{(c^a)}.$$

A. Rechnung mit Resultaten 1. Stufe.

Potenzirung mit einer Summe.

$c^{a+b} = c.c.c... (a+b) \text{ mal.}$ 38. Eine Zahl wird mit einer 41.
 $= c.c.c... (a \text{ mal})$ Summe potenzirt, indem man
 $.c.c.c... (b \text{ mal});$ 19. sie mit den einzelnen Sum-
 $c^{a+b} = c^a . c^b.$ 38. manden potenzirt und die
 Potenzen multiplicirt.

Potenzirung mit einer Differenz.

$c^{a+b} = c^a . c^b.$ 41. Eine Zahl wird mit einer Dif- 42.
 Sei $a+b = x; a = x - b;$ ferenz potenzirt, indem man
 $c^x = c^{x-b} . c^b.$ sie mit den einzelnen Gliedern potenzirt und die Potenz
 $\frac{c^x}{c^b} = c^{x-b}.$ 28. 29. mit dem Minuend durch die
 andere dividirt.

Betrachtet man in 41 die rechte, in 42 die linke Seite der Formel als Aufgabe, so erhält man die Regel: Potenzen 43, mit gleicher Grundzahl werden multiplicirt oder dividirt, indem man die Grundzahl mit der Summe oder Differenz der Exponenten potenzirt,

Also nur bedingungsweise kann ein Product oder Quotient von Potenzen wieder als Potenz dargestellt werden. Wie diese Bedingung nachträglich in einer Aufgabe erfüllt werden kann, werden wir weiter unten sehen. (S. Anm. zu 58.) (Aufgaben: Hofmann 2. Zweiter Abschn. II. — Bardey XI. 21—50.)

Die zweite Grundaufgabe $(a + b)^c$ kann mit den bisherigen Mitteln allgemein noch nicht gelöst werden (die allgemeine Lösung s. Nr. 187), wohl aber für jeden speciellen Exponenten durch wiederholte Multiplication. Zu merken sind die für die Exponenten 2 und 3 sich ergebenden Formeln (NB. Statt „hoch zwei“ sagt man auch „Quadrat“).

$$44. \quad \begin{cases} (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; & (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \\ (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; & (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. \end{cases}$$

Anm. Die Formeln links ergeben sich auch aus 25, Formel 1) und 4), wenn man darin $d = a$, $e = b$ setzt. Für die Formeln 2) und 3) daselbst ergiebt dasselbe Verfahren:

$$45. \quad (a + b)(a - b) = a^2 - b^2,$$

eine Formel, welche sich noch verallgemeinern lässt, da man durch Ausführung der Multiplication findet, dass

$$45a. \quad (a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})(a - b) = a^n - b^n$$

ist. Hiernach kann man also die Differenz von Potenzen mit gleichen Exponenten als Product darstellen.

Setzt man in der Formel für $(a + b)^2$ statt b die Summe $b + c$, dann statt c die Summe $c + d$ u. s. w., so erhält man

$$45b. \quad \begin{aligned} (a + b + c + d + \dots)^2 = & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \dots + 2ab + 2ac + 2ad + \dots \\ & + 2bc + 2bd + \dots \\ & + 2cd + \dots \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} (a + b + c + d + \dots)^2 = & a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \dots + 2ab + 2(a + b)c + 2(a + b + c)d + \dots \\ = & a^2 + b(2a + b) + c[2(a + b) + c] + d[2(a + b + c) + d] + \dots \end{aligned}$$

(Aufgaben: Hofmann 2. Zweiter Abschnitt VI. 1—6, 17—20, 31—34 VII. 1. 2. 6. 7.)

36. B. Rechnung mit Resultaten 2. Stufe.

Potenzirung eines Productes.

$$46. \quad (ab)^c = (ab)(ab) \dots (c \text{ mal})$$

$$= a a a \dots (c \text{ mal})$$

$$. b b b \dots (c \text{ mal})$$

$$(ab)^c = a^c \cdot b^c.$$

38. Ein Product wird mit einer Zahl potenzirt, indem man die Factoren einzeln potenzirt und die Potenzen multiplicirt.

19. 18.

38.

Potenzirung eines Quotienten.

$$(ab)^c = a^c \cdot b^c. \quad 46. \quad \text{Ein Quotient wird mit 47.}$$

Sei $ab = x; a = \frac{x}{b}.$ einer Zahl potenziert, in-

$$x^c = \left(\frac{x}{b}\right)^c \cdot b^c; \quad \text{dem man seine Glieder}$$

$$\frac{x^c}{b^c} = \left(\frac{x}{b}\right)^c \quad 28. \quad 29. \quad \text{einzeln potenziert und}$$

die Potenz des Dividend

durch die andre dividirt.

Betrachtet man in 46 die rechte, in 47 die linke Seite der Formel als Aufgabe, so erhält man die Regel: Potenzen 48. mit gleichen Exponenten werden multiplicirt oder dividirt, indem man das Product oder den Quotienten ihrer Grundzahlen mit dem Exponenten potenziert.

Anm. Potenzen mit gleicher Grundzahl und gleichem Exponenten können also entweder nach 43 oder nach 48 multiplicirt und dividirt werden.

Die zweite Grundaufgabe c^{ab} giebt als Lösung $(c^a)^b$, d. h. die Form der ersten Grundaufgabe 3. Stufe, kann daher übergangen werden.

37. C. Rechnung mit Resultaten 3. Stufe.**Potenzirung einer Potenz.**

$$(c^a)^b = c^a \cdot c^a \dots (b \text{ mal}) \quad 38. \quad \text{Eine Potenz wird mit 49.}$$

$$= c^{a+a+\dots (b \text{ mal})} \quad 43. \quad \text{einer Zahl potenziert, in-}$$

$$(c^a)^b = c^{ab}. \quad 17. \quad \text{dem man den Exponen-}$$

ten mit der Zahl multi-

plicirt.

Betrachtet man die rechte Seite von 49 als Aufgabe, so ergibt sich die Regel (als Lösung der vorigen Grundaufgabe): Eine Zahl wird mit einem Producte potenziert, indem man sie mit den Factoren der Reihe nach potenziert.

Aus

$$(c^a)^b = c^{ab}$$

folgt durch Vertauschung von a und b

$$(c^b)^a = c^{ba}.$$

Da diese Vertauschung die rechte Seite ungeändert lässt, so sind auch die linken Seiten gleich, also

$$(c^a)^b = (c^b)^a.$$

In Worten: Die Reihenfolge, in der man mit mehreren 50.

Zahlen potenzirt, ist beliebig. — Oder: Eine Potenz wird potenzirt, indem man die Grundzahl potenzirt.

Anm. Die Formel 50 ergibt sich auch, wenn man in der Ableitung von 49 statt 43 die Regel 48 anwendet. — In 49 wäre noch der Uebergang vom Product ab zum Quotienten zu machen. Derselbe führt aber auf eine der nächsten Rechnungsart angehörige Formel, und ist daher dort nachzuholen (56). (Aufgaben: Hofmann 2. Zweiter Abschn. V. Dritter Abschn. — Bardey XI.)

Die zweite Grundaufgabe $b^{(c^a)}$ führt der Reihe nach zu den Ausdrücken:

$$b^{(c^a)} = b^{c \cdot c \dots (a \text{ mal})} = ((b^c)^c) \dots a \text{ mal}$$

und da der letzte dieser Ausdrücke keine Vereinigung von c und b zu einem abgekürzten Ausdrucke gestattet (vergl. die Anm. zu 40), so ist diese Aufgabe durch keine andere Rechnung lösbar.

Anm. Setzt man $b^{(c^a)} = x$, bestimmt der Reihe nach b , c , a , und macht die Uebergänge von den Potenzen zu den entgegengesetzten Resultaten, so erhält man eine Reihe von gleichfalls ungelöst bleibenden Aufgaben, welche unten an passender Stelle werden erwähnt werden.

6. Die Radicirung.

38. Vorbemerkung. — Aus der Gleichung der Potenzirung $b^a = c$ gehen zwei neue Aufgaben hervor, nämlich: b zu finden, wenn a und c , und: a zu finden, wenn b und c gegeben sind. Beide Aufgaben erfordern zu ihrer Lösung zwei verschiedene Rechnungsarten, da a und b nicht vertauschbar sind. Diejenige Vereinigung zweier gegebener Zahlen a und c , welche die Aufgabe löst: Eine Zahl b zu finden, welche, mit a potenzirt, c hervorbringt, heisst Radicirung.

39. Erklärungen: 1) Unter der a^{ten} Wurzel aus einer Zahl c versteht man diejenige Zahl b , welche man mit a potenziren muss, um c zu erhalten. — Wenn

$$b^a = c,$$

so ist die

Gleichung der Radicirung: $\sqrt[a]{c} = b$ (a^{te} Wurzel aus c gleich b).

2) c heisst Radicand, a Exponent.

Anm. Die Exponenten der Potenz und der Wurzel können nöthigenfalls durch die Namen Potenzexponent und Wurzelexponent unterschieden werden.

3) Die a^{te} Wurzel aus c bilden, heisst: c mit a radiciren.

Anm. a heisst auch der Grad der Wurzel, daher $\sqrt[a]{c}$ eine Wurzel vom Grade a .

40. *Eigenschaft der Radicirung.* — Radicand und Exponent sind nicht vertauschbar.

41. *Weitere Bemerkungen zur Radicirung.* — 1) Da die Potenz aus lauter gleichen Factoren von der Grösse der Grundzahl besteht, so muss der Radicand ein Product von soviel gleichen Factoren sein, als der Exponent angiebt. Nur unter dieser Bedingung ist die Wurzel eine Zahl in dem oben festgestellten Sinne. — Die Radicirung ist demnach nur eine wiederholte Division, bei welcher die Grösse des Divisors bestimmt wird.

2) Wenn $a = c$, und $b = d$, so ist

$$\sqrt[b]{a} = \sqrt[d]{c},$$

mithin: Gleiches mit Gleichem radicirt giebt Gleiches.*) ^{51.}

42. *Zusammenhang mit der Potenzirung.* — Aus jeder der beiden Gleichungen:

$$1) b^a = c; \quad 2) \sqrt[a]{c} = b$$

kann man den Werth des rechts stehenden Buchstabens in die andere einsetzen. Dies giebt die Formeln:

$$2) \text{ in } 1) (\sqrt[a]{c})^a = c; \quad 1) \text{ in } 2) \sqrt[a]{b^a} = b.$$

In Worten: Eine Zahl bleibt ungeändert, wenn man sie mit einer anderen erst potenzirt und dann radicirt (oder umgekehrt). ^{52.}

Oder: Potenzirt man eine Wurzel mit ihrem Exponenten, so erhält man den Radicand. — Radicirt man eine Potenz mit ihrem Exponenten, so erhält man die Grundzahl. — Daher besteht die Radicirung in der Fortschaffung des Exponenten.

Anm. Vermöge der ersten Regel sind Potenzirung und Radicirung entgegengesetzte Rechnungsarten. — Der Wurzelexponent 2 pflegt beim Schreiben und Sprechen weggelassen zu werden.

43. *Rechnung mit Resultaten.* — Dieselbe ergiebt sich, wenn man in den Formeln der Potenzirung überall den Uebergang von der Potenz zur Wurzel macht.

A. Rechnung mit Resultaten 1. Stufe.

Setzt man in jeder der Formeln 41 und 42 die beiden Potenzen gleich neuen Buchstaben, so wird dieselbe Grundzahl

*) S. jedoch Anm. zu Nr. 98.

doppelt bestimmt, während nur eine dieser Bestimmungen benutzt werden kann. Diese Formeln sind also für den Uebergang zur Radicirung nicht brauchbar. (Welche Formeln ergeben sich, wenn man in 41 und 42 nur mit einer der Potenzen den Uebergang zur Wurzel macht, und wozu können diese Formeln dienen?) Hiernach bleibt die Aufgabe, eine Summe oder eine Differenz zu radiciren, zunächst ungelöst.

44. B. Rechnung mit Resultaten 2. Stufe.

Radicirung eines Productes.

$$\begin{aligned}
 53. \quad & (ab)^c = a^c \cdot b^c. \\
 & \text{Sei } a^c = x; \quad a = \sqrt[c]{x} \\
 & \text{und } b^c = y; \quad b = \sqrt[c]{y}. \\
 & \left(\sqrt[c]{x} \cdot \sqrt[c]{y} \right)^c = xy; \\
 & \sqrt[c]{x} \cdot \sqrt[c]{y} = \sqrt[c]{xy}.
 \end{aligned}$$

46. Ein Product wird mit einer Zahl radicirt, indem man die Factoren einzeln radicirt und die Wurzeln multiplicirt.

51. 52.

Radicirung eines Quotienten.

$$\begin{aligned}
 54. \quad & \sqrt[c]{xy} = \sqrt[c]{x} \cdot \sqrt[c]{y}. \\
 & \text{Sei } xy = z; \quad x = \frac{z}{y}. \\
 & \sqrt[c]{z} = \sqrt[c]{\frac{z}{y}} \cdot \sqrt[c]{y}. \\
 & \frac{\sqrt[c]{z}}{\sqrt[c]{y}} = \sqrt[c]{\frac{z}{y}}.
 \end{aligned}$$

53. Ein Quotient wird mit einer Zahl radicirt, indem man seine Glieder einzeln radicirt und die Wurzel des Dividend durch die andere dividirt.

28. 29.

55. Betrachtet man in 53 und 54 die linke Seite der Formel als Aufgabe, so erhält man die Regel: Wurzeln mit gleichen Exponenten werden multiplicirt oder dividirt, indem man das Product oder den Quotienten ihrer Radicanden mit dem Exponenten radicirt.

Wie zwei beliebigen Wurzeln derselbe Exponent gegeben werden kann, wird später gezeigt. (S. Anm. zu 58.) (Aufgaben: Hofmann 2. Vierter Abschn. I. 1—8; V. 1, 4—7. Bardey XIII. 4.)

Anm. 54 ist auch aus 47 abzuleiten. — Setzt man in 46 nur $a^c = x$, $a = \sqrt[c]{x}$, und in 47 nur $x^c = y$, $x = \sqrt[c]{y}$, oder $b^c = z$, $b = \sqrt[c]{z}$, so erhält man die Formeln:

$$(b \sqrt[c]{x})^c = x \cdot b^c; \quad \frac{y}{b^c} = \left(\frac{\sqrt[c]{y}}{b} \right)^c; \quad \frac{x^c}{z} = \left(\frac{x}{\sqrt[c]{z}} \right)^c,$$

und hieraus nach 51 und 52:

$$b \cdot \sqrt[c]{x} = \sqrt[c]{x \cdot b^c}; \quad \sqrt[c]{\frac{y}{b^c}} = \frac{\sqrt[c]{y}}{b}; \quad \sqrt[c]{\frac{x^c}{z}} = \frac{x}{\sqrt[c]{z}}.$$

Diese Formeln zeigen, wie eine Zahl durch Multiplication oder Division mit einer Potenz oder Wurzel so vereinigt werden kann, dass das Resultat wieder eine Potenz oder Wurzel ist. — Umgekehrt zeigt die erste Formel der zweiten Reihe, wie der Radicand von einem Potenzfactor, die zweite, wie er von einem Divisor befreit werden kann, da der Quotient unter der Wurzel (nach Anm. zu 33) stets so erweitert werden kann, dass sein Divisor eine Potenz vom Grade des Wurzelexponenten wird. — Die dritte Formel giebt durch Anwendung dieses Verfahrens:

$$\frac{x}{\sqrt[c]{z}} = \sqrt[c]{\frac{x^c}{z}} = \sqrt[c]{\frac{x^c \cdot z^{c-1}}{z^c}} = \frac{x}{z} \sqrt[c]{z^{c-1}},$$

und zeigt hiernach, wie eine Wurzel aus einem Divisor weggeschafft werden kann. Sei endlich gegeben $\frac{x}{\sqrt[n]{y} - \sqrt[n]{z}}$,

so zeigt 45a, wenn man darin $a = \sqrt[n]{y}$, $b = \sqrt[n]{z}$, also $a^n = y$, $b^n = z$ setzt, dass

$$[(\sqrt[n]{y})^{n-1} + \dots + (\sqrt[n]{z})^{n-1}] (\sqrt[n]{y} - \sqrt[n]{z}) = y - z$$

ist. Mithin muss man den gegebenen Quotienten mit der ersten Klammer erweitern, um seinem Divisor die Form $y - z$ zu geben, d. h. die Wurzeln daraus zu entfernen. (Aufgaben: Hofmann 2. Vierter Abschn. IV. 1—53; VI. — Bardey XIII. 2. 3. 5.)

45. C. Rechnung mit Resultaten 3. Stufe.

Radicalung einer Potenz.

$$(c^a)^b = c^{ab}$$

Sei $ab = x; \quad a = \frac{x}{b}$

$$\left(c^{\frac{x}{b}} \right)^b = c^x$$

$$c^{\frac{x}{b}} = \sqrt[b]{c^x}.$$

49. Eine Potenz wird mit 56. einer Zahl radicirt, indem man den Exponenten durch die Zahl dividirt.

51. 52.

Betrachtet man die linke Seite von 56 als Aufgabe, so ergibt sich die Regel: Eine Zahl wird mit einem Quotienten potenziert, indem man sie mit dem Dividend potenziert, und mit dem Divisor radicirt.

Anm. Eine Potenz, deren Exponent ein Quotient ist, heisst Bruchpotenz, und man kann die letzte Regel in den Worten aussprechen: Eine Bruchpotenz ist gleich einer Wurzel vom Grade des Divisors aus einer Potenz vom Grade des Dividend. — (Aufgaben: Hofmann 2. Fünfter Abschn. III. — Bardey XVI.)

In 49 kann der Uebergang von Product zu Quotient auch dadurch geschehen, dass man $ab = x$, $b = \frac{x}{a}$ setzt. Dies giebt

$$56a, b. \quad (c^a)^{\frac{x}{a}} = c^x, \text{ oder: } c^a = \sqrt[\frac{x}{a}]{c^x}.$$

Diese Formeln, welche nur zeigen, wie durch Einführung eines neuen Buchstabens eine Potenz in eine andere Potenz oder eine Wurzel verwandelt werden kann, nennen wir Uebergangsformeln, weil sie den Uebergang zu anderen vermitteln, durch welche Aufgaben gelöst werden. — (Aufgaben: Hofmann 2. Vierter Abschn. I. 9—16, 23—26, 41—83; IV. 54—56, 61—83; V. 1—23, 118—192. — Bardey XIII. 6—21.)

Potenzirung einer Wurzel.

$$57. \quad c^a = \sqrt[\frac{x}{a}]{c^x}. \quad 56b. \quad \text{Eine Wurzel wird mit einer Zahl potenziert, indem man den Exponenten durch die Zahl dividirt.}$$

Sei $c^x = y$; $c = \sqrt[\frac{x}{a}]{y}$

$$\left(\sqrt[\frac{x}{a}]{y}\right)^a = \sqrt[\frac{x}{a}]{y}.$$

Betrachtet man die rechte Seite von 57 als Aufgabe, so ergibt sich die Regel: Eine Zahl wird mit einem Quotienten radicirt, indem man sie mit dem Dividend radicirt, und mit dem Divisor potenziert.

Macht man in 56a den Uebergang von der Potenz zur Wurzel, indem man $c^a = y$, $c = \sqrt[\frac{x}{a}]{y}$ setzt, so findet sich

$$y^{\frac{x}{a}} = \left(\sqrt[\frac{x}{a}]{y}\right)^x.$$

(In Worten?) Nun ist nach 56

$$y^{\frac{x}{a}} = \sqrt[\frac{x}{a}]{y^x},$$

also:

$$\left(\sqrt[a]{y}\right)^x = \sqrt[a]{y^x}.$$

In Worten: Die Reihenfolge, in der man mit mehreren 58. Zahlen potenzirt und radicirt, ist beliebig. — Oder: Eine Wurzel wird potenzirt, indem man den Radicand potenzirt. Eine Potenz wird radicirt, indem man die Grundzahl radicirt. — Es ist also:

$$c^{\frac{x}{b}} = \sqrt[b]{c^x} = \left(\sqrt[b]{c}\right)^x = \sqrt[\frac{x}{b}]{c}.$$

Macht man in 49 den Uebergang von der Potenz zur Wurzel, indem man $c^a = x$, $c = \sqrt[a]{x}$ setzt, so erhält man die Uebergangsformeln:

$$x^b = \left(\sqrt[a]{x}\right)^{ab}; \text{ oder: } \sqrt[ab]{x^b} = \sqrt[a]{x}. \quad 58a, b.$$

Zwei andere Formeln gehen auf dieselbe Weise aus 56

hervor, nämlich, wenn man $c^x = y$, $c = \sqrt[\frac{x}{b}]{y}$ setzt:

$$\left(\sqrt[\frac{x}{b}]{y}\right)^{\frac{x}{b}} = \sqrt[b]{y}; \quad \sqrt[b]{y} = \sqrt[\frac{x}{b}]{\sqrt[b]{y}}. \quad 58c, d.$$

(Aufgaben: Hofmann 2. Vierter Abschn. VII.)

Anm. Die 4 Formeln 56a, 58a, b, d zeigen, wie eine Potenz und eine Wurzel auf je doppelte Weise in eine andere Potenz oder Wurzel verwandelt werden kann. Insbesondere folgt aus 58a (56a): Eine Potenz ändert sich nicht, wenn man die Grundzahl mit einer Zahl radicirt (potenzirt) und den Exponenten mit derselben Zahl multiplicirt (dividirt). Und aus 58b (58d): Eine Wurzel ändert sich nicht, wenn man den Radicand mit einer Zahl potenzirt (radicirt) und den Exponenten mit derselben Zahl multiplicirt (dividirt). — Oder: Eine Wurzel aus einer Potenz bleibt ungeändert, wenn man die beiden Exponenten mit derselben Zahl multiplicirt oder dividirt. (Folgt aus 56 in Verbindung mit Anm. zu 33.)

Vermöge dieser Regeln kann man Potenzen und Wurzeln mit verschiedenen Exponenten auf gleiche Exponenten bringen. So ist:

$$c^a \cdot d^b = \left(\sqrt[b]{c}\right)^{ab} \cdot \left(\sqrt[a]{d}\right)^{ab} = \left(\sqrt[b]{c} \cdot \sqrt[a]{d}\right)^{ab}. \quad 48.$$

$$\frac{c^a}{d^b} = \frac{\left(\sqrt[b]{c}\right)^{ab}}{\left(\sqrt[a]{d}\right)^{ab}} = \left(\frac{\sqrt[b]{c}}{\sqrt[a]{d}}\right)^{ab}. \quad 48.$$

$$\sqrt[a]{c} \cdot \sqrt[b]{d} = \sqrt[ab]{c^b} \cdot \sqrt[ab]{d^a} = \sqrt[ab]{c^b \cdot d^a}. \quad 55.$$

$$\frac{\sqrt[a]{c}}{\sqrt[b]{d}} = \frac{\sqrt[ab]{c^b}}{\sqrt[ab]{d^a}} = \sqrt[ab]{\frac{c^b}{d^a}}. \quad 55.$$

Hiermit ist die in 48 und 55 nur bedingungsweise bewirkte Multiplication und Division von Potenzen und Wurzeln allgemein ausgeführt. (Directe Ableitung der letzten beiden Formeln aus den ersten beiden!) (Aufgaben: Hofmann 2. Vierter Abschn. V. 24—80. — Bardey XIII. 6. 22—40.)

Radicirung einer Wurzel.

$$59. \quad \sqrt[ab]{x^b} = \sqrt[a]{x}.$$

$$\text{Sei } x^b = y, \quad x = \sqrt[b]{y}.$$

$$\sqrt[ab]{y} = \sqrt[a]{\sqrt[b]{y}}.$$

58b. Eine Wurzel wird mit einer Zahl radicirt, indem man den Exponenten mit der Zahl multiplicirt.

Betrachtet man in 59 die linke Seite als Aufgabe, so ergibt sich die Regel: Eine Zahl wird mit einem Producte radicirt, indem man sie mit den Factoren der Reihe nach radicirt.

Aus

$$\sqrt[ab]{y} = \sqrt[a]{\sqrt[b]{y}}$$

folgt durch Vertauschung von a und b

$$\sqrt[ba]{y} = \sqrt[b]{\sqrt[a]{y}}.$$

Da diese Vertauschung die linke Seite ungeändert lässt, so sind auch die rechten Seiten gleich, also:

$$\sqrt[a]{\sqrt[b]{y}} = \sqrt[b]{\sqrt[a]{y}}.$$

60. In Worten: Die Reihenfolge, in der man mit mehreren Zahlen radicirt, ist beliebig. — Oder: Eine Wurzel wird radicirt, indem man den Radicand radicirt. — (Aufgaben: Hofmann 2. Vierter Abschn. I. 17—22; IV. 57—60; V. 81—95, 107—117. — Bardey XIII. 7.)

Anm. Hiernach gestatten die Aufgaben (55) und (66) je zwei, (56) und (65) je drei verschiedene Lösungen. Ungelöst bleiben die aus $b^{(c^a)} = x$

hervorgehenden Aufgaben: $\sqrt[c^a]{x} = b$, sowie, wenn man $c^a = \sqrt[z]{y}$ setzt:

$$\sqrt[b]{\sqrt[z]{y}} = x, \quad \sqrt[z]{\sqrt[b]{x}} = b.$$

46. Erweiterungen. — 1) Setzt man in den Formeln 46, 47, 53, 54 $c = de$ und $c = \frac{d}{e}$, so erhält man die Potenzirung

und Radicirung zwischen Producten und Quotienten. Von den 8 sich ergebenden Formeln lautet die erste:

$$(ab)^{de} = a^{de} \cdot b^{de}.$$

2) Zahlreiche andere Formeln ergeben sich, wenn man in den Formeln 49, 56, 57, 59 die einzelnen Buchstaben durch Producte, Quotienten, Potenzen oder Wurzeln ersetzt. Man erhält Formeln der Potenzirung und Radicirung zwischen Producten und Quotienten einerseits, und Potenzen und Wurzeln andererseits, sowie zwischen Potenzen und Wurzeln. Links steht allemal eine Verbindung zweier Resultate, rechts die successive Ausführung dreier Rechnungen an vier Zahlen. Die oben erwähnten Uebergangsformeln ergeben sich aus diesen Formeln durch Gleichsetzung zweier Buchstaben.

7. Die Logarithmirung.

47. *Vorbemerkung.* — Die zweite der aus der Gleichung der Potenzirung, $b^a = c$, hervorgehenden Aufgaben war: a zu finden, wenn b und c gegeben sind. Diejenige Vereinigung von b und c , deren Resultat a ist, heisst Logarithmirung.

48. *Erklärungen.* — 1) Unter dem Logarithmus einer Zahl c nach b versteht man diejenige Zahl a , mit welcher man b potenziren muss, um c zu erhalten. — Wenn

$$b^a = c,$$

so ist die

Gleichung d. Logarithmirung: $\overset{b}{\text{L}}c = a$ (Logarithm. v. c nach b gleich a).

2) c heisst Numerus, b Grundzahl.

Anm. Die Grundzahlen der Potenz und des Logarithmus können nöthigenfalls durch die Namen Potenzgrundzahl und Logarithmen-
grundzahl unterschieden werden.

3) Den Logarithmus von c nach b bilden, heisst: c nach b logarithmiren.

49. *Eigenschaft der Logarithmirung.* — Numerus und Grundzahl sind nicht vertauschbar.

50. *Weitere Bemerkungen zur Logarithmirung.* — 1) Da die Potenz aus lauter gleichen Factoren von der Grösse der Grundzahl besteht, so muss der Numerus ein Product aus lauter gleichen Factoren von der Grösse der Grundzahl sein. Nur unter dieser Bedingung ist der Logarithmus eine Zahl in dem oben festgestellten Sinne. — Die

Logarithmirung ist daher eine wiederholte Division, bei welcher die Anzahl der Divisoren bestimmt wird.

2) Wenn $a = c$ und $b = d$, so ist

$${}^b\!l a = {}^d\!l c,$$

mithin: Gleiches mit Gleichem logarithmirt giebt
61. Gleiches.

51. Zusammenhang mit der Potenzirung. — Aus jeder der beiden Gleichungen:

$$1) b^a = c; \quad 2) {}^b\!l c = a$$

kann man den Werth des rechts stehenden Buchstabens in die andere einsetzen. Dies giebt die Formeln:

$$2) \text{ in } 1) b^{{}^b\!l c} = c; \quad 1) \text{ in } 2) {}^b\!l(b^a) = a.$$

62. In Worten: Eine Zahl bleibt ungeändert, wenn man sie erst nach einer andern logarithmirt, und die andre mit dem Resultate potenziert (oder umgekehrt).

Oder: Potenziert man mit einem Logarithmus seine Grundzahl, so erhält man den Numerus. — Logarithmirt man eine Potenz nach ihrer Grundzahl, so erhält man den Exponenten. — Daher besteht die Logarithmirung in der Fortschaffung der Grundzahl.

Anm. Vermöge der ersten Regel sind Potenzirung und Logarithmirung entgegengesetzte Rechnungsarten.

52. Rechnung mit Resultaten. — Dieselbe ergibt sich, wenn man in den Formeln der Potenzirung und Radicirung überall den Uebergang von der Potenz zum Logarithmus macht.

A. Rechnung mit Resultaten 1. Stufe.

Macht man in den Formeln 41 und 42, welche die Potenzirung mit einer Summe und einer Differenz ausdrücken, den Uebergang von der Potenz zum Logarithmus, so geht aus diesen Formeln nicht die Logarithmirung einer Summe und Differenz hervor, sondern die eines Productes und Quotienten, also die Rechnung mit Resultaten 2. Stufe. — Und ebenso wenig, wie die Formeln 41 und 42 den Uebergang zur Wurzel, gestatten 46 und 47 den Uebergang zum Logarithmus (und zwar aus demselben Grunde). Demnach sind von den Formeln der Potenzirung hier nur diejenigen der 1. und 3. Stufe zu benutzen. (Vgl. den entsprechenden Abschnitt der Radicirung.)

53. B. Rechnung mit Resultaten 2. Stufe.

Logarithmirung eines Productes.

$$c^{a+b} = c^a \cdot c^b.$$

41. Ein Product wird nach 63. einer Zahl logarithmirt, indem man die Factoren einzeln logarithmirt und die Logarithmen addirt.

Sei $c^a = x; a = {}^c\!l_x$

und $c^b = y; b = {}^c\!l_y.$

$${}_c\!l_x + {}^c\!l_y = xy$$

$${}^c\!l_x + {}^c\!l_y = {}^c\!l_{(xy)}. \quad 61. \quad 62.$$

Logarithmirung eines Quotienten.

$${}^c\!l_{(xy)} = {}^c\!l_x + {}^c\!l_y.$$

63.

Ein Quotient wird 64. nach einer Zahl logarithmirt, indem man seine Glieder einzeln logarithmirt, und den Logarithmus des Divisors von dem andern subtrahirt.

Sei $xy = z; x = \frac{z}{y}.$

$${}^c\!l_z = {}^c\!l_{\frac{z}{y}} + {}^c\!l_y.$$

$${}^c\!l_z - {}^c\!l_y = {}^c\!l_{\frac{z}{y}}.$$

9. 10.

Betrachtet man in 63 und 64 die linke Seite der Formel als Aufgabe, so erhält man die Regel: Logarithmen mit gleicher Grundzahl werden addirt oder subtrahirt, indem man das Product oder den Quotienten ihrer Numeri nach der Grundzahl logarithmirt. 65.

Wie zwei beliebigen Logarithmen dieselbe Grundzahl gegeben werden kann, wird später gezeigt. (S. Anm. zu 67.)

Anm. 64 ist auch aus 42 abzuleiten. — Setzt man in 41 nur $c^a = x, a = {}^c\!l_x$, und in 42 nur $c^x = y, x = {}^c\!l_y$, oder $c^b = z, b = {}^c\!l_z$, so erhält man die Formeln:

$$c^b + {}^c\!l_x = x \cdot c^b; \quad \frac{y}{c^b} = c^{{}^c\!l_y - b}; \quad \frac{c^x}{z} = c^{x - {}^c\!l_z},$$

und hieraus nach 61 und 62:

$$b + {}^c\!l_x = {}^c\!l_{(x \cdot c^b)}; \quad {}^c\!l_{\frac{y}{c^b}} = {}^c\!l_y - b; \quad {}^c\!l_{\frac{c^x}{z}} = x - {}^c\!l_z.$$

Diese Formeln zeigen, wie eine Zahl durch Multiplication und Division mit einer Potenz, oder durch Addition und Subtraction mit einem Logarithmus so vereinigt werden kann, dass das Resultat wieder eine Potenz oder ein Logarithmus ist.

54. C. Rechnung mit Resultaten 3. Stufe.

Logarithmirung einer Potenz.

66. $(c^a)^b = c^{ab}.$
 Sei $c^a = x; a = {}^c l x.$
 $x^b = c^{b \cdot {}^c l x}.$
 ${}^c l(x^b) = b \cdot {}^c l x.$

49. Eine Potenz wird mit einer Zahl logarithmirt, indem man den Exponenten mit dem Logarithmus der Grundzahl multiplicirt.

61. 62.

Betrachtet man die rechte Seite von 66 als Aufgabe, so erhält man die Regel: Eine Zahl wird mit einem Logarithmus multiplicirt, indem man den Numerus mit ihr potenzirt.

Logarithmirung einer Wurzel.

67. ${}^c l(x^b) = b \cdot {}^c l x.$
 Sei $x^b = y; x = \sqrt[b]{y}.$
 ${}^c l y = b \cdot {}^c l \sqrt[b]{y}.$
 $\frac{{}^c l y}{b} = {}^c l \sqrt[b]{y}.$

66. Eine Wurzel wird mit einer Zahl logarithmirt, indem man den Logarithmus des Radicand durch den Exponenten dividirt.

28.

Anm. 67 kann auch aus 56 abgeleitet werden. In der Ableitung von 66 kann die dritte Reihe (nach 49) geschrieben werden:

$$x^b = (c^b)^{{}^c l x}, \text{ oder: } c^b = \sqrt[b]{x^b}, \text{ oder: } {}^c l x = {}^c l(x^b).$$

Die letzte dieser Formeln giebt die Regel: Ein Logarithmus bleibt ungeändert, wenn man Numerus und Grundzahl mit derselben Zahl potenzirt. (Vgl. die Anm. zu 58.) Vermöge dieser Regel kann man Logarithmen mit verschiedenen Grundzahlen auf gleiche Grundzahlen bringen und die oben (65) bedingungsweise bewirkte Addition und Subtraction von Logarithmen allgemein ausführen. — In den drei obigen Formeln kann man von jeder der beiden Potenzen den Uebergang zur Wurzel oder zum Logarithmus machen, und dadurch 24 neue Formeln ableiten. (Vgl. Anm. zu 33.)

In der Ableitung von 67 kann die dritte Reihe (nach 56 und 58) geschrieben werden:

$$\left(\sqrt[b]{c}\right)^{{}^c l y} = \sqrt[b]{y}, \text{ oder: } \sqrt[b]{c} = \sqrt[b]{{}^c l y}, \text{ oder: } {}^c l y = \sqrt[b]{c} {}^c l_b \sqrt[b]{y}.$$

Die letzte dieser Formeln giebt die Regel: Ein Logarithmus bleibt ungeändert, wenn man Numerus und Grundzahl mit derselben Zahl radicirt. (Vgl. Anm. zu 37.)

Zu den Formelpaaren 56 a, b; 58 a, b; 58 c, d tritt jedesmal eine dritte Formel, wenn man aus der ersten den Exponenten bestimmt. Dann enthalten die 3 ersten Formeln je 2, die drei folgenden je 1, die drei letzten keine Potenz. Von jeder der vorhandenen Potenzen kann man dann wieder den Uebergang zu Wurzel oder Logarithmus machen und dadurch neue Formeln erhalten.

Macht man in 66 den Uebergang von der Potenz zum Logarithmus, indem man $x^b = y$, $b = {}^x l y$ setzt, so findet sich:

$${}^c l y = {}^x l y \cdot {}^c l x, \text{ oder: } \frac{{}^c l y}{{}^x l y} = {}^c l x, \text{ oder: } \frac{{}^c l y}{{}^c l x} = {}^x l y.$$

Ungelöst bleiben die aus $b^{(c^a)} = x$ hervorgehenden Aufgaben $\sqrt[b]{l x} = c$,

${}^c l ({}^b l x) = a$, sowie, wenn man $c^a = \sqrt[y]{z}$ setzt: $({}^b l x)^z = y$, $({}^b l x) l y = z$,

und endlich, wenn man $c^a = {}^z l y$ setzt: $b {}^z l y = x$, $\sqrt[x]{z} = b$.

Auf Erweiterungen der aufgestellten Formeln, die darin bestehen würden, dass man die einzeln stehenden Buchstaben [z. B. b in $(c^a)^b$] durch Resultate ersetzte, mag hier nur aufmerksam gemacht werden.

Aufgaben. Ein gutes Uebungsmaterial bietet die Aufstellung und Umformung der in dieser Anmerkung angedeuteten Formeln. (Ferner Hofmann. 3. Elfter Abschn. I. — Bardey XVIII. B.)

55. Rückblick. — Wir haben im Vorstehenden 7 Arten der Vereinigung zweier Zahlen kennen gelernt, die wir einerseits in drei Stufen, (wie schon geschehen) andererseits in directe und indirecte Rechnungen eintheilen können, indem die letzteren aus den ersteren durch Stellung neuer Aufgaben hervorgehen und in einem Gegensatze zu denselben stehen. Ausserdem sahen wir, wie sich auch mehrere Zahlen zu einem Resultate vereinigen lassen, wobei jedoch nur in der Addition und Multiplication eine Vertauschbarkeit der zu vereinigenden Zahlen bestand. — Indess sind die zu den indirecten Rechnungen führenden Aufgaben nur unvollständig gelöst worden, indem die durch solche Rechnungen zu vereinigenden Zahlen gewisse Bedingungen erfüllen mussten; und auch sonst sind einige Aufgaben, welche die Rechnung mit Resultaten betrafen, ungelöst geblieben. Die ersten dieser Lücken auszufüllen, wird Aufgabe des nächsten Abschnittes sein.

B. Die relativen Zahlen.

56. Uebersicht. — Durch die directen Rechnungen (Addition, Multiplication, Potenzirung) konnten bisher zwei beliebige Zahlen vereinigt werden, durch die indirecten (Subtraction,

Division, Radicirung, Logarithmirung) jedoch nur solche, welche bestimmten Bedingungen genügten. So musste in der Subtraction der Minuend grösser als der Subtrahend sein, in der Division der Divisor ein Factor des Dividend, in der Radicirung und Logarithmirung Radicand, resp. Numerus ein Product aus gleichen Factoren. Diese Bedingungen aber laufen der allgemeinen Bedeutung eines Buchstabens zuwider, welcher ja jede beliebige Zahl soll vorstellen können. — Um daher auch für die indirecten Rechnungen die allgemeine Bedeutung der Buchstaben aufrecht zu erhalten, wird es nöthig sein, zu untersuchen, was für Resultate diese Rechnungen ergeben, wenn jene Bedingungen aufgehoben werden. Diese Resultate werden freilich nicht mehr Zahlen in dem früher festgestellten Sinne sein, die eine Vielheit von Einheiten ausdrücken. Es wird daher der Begriff „Zahl“ in jedem dieser Fälle eine Erweiterung erfahren. Diese neuen Zahlen nennen wir im Gegensatz zu den früheren (absoluten) „relative“. Die Rechnungen mit ihnen erfolgen nach besonderen Gesetzen.*)

a. Erweiterung des Zahlbegriffes durch Subtraction.

Wenn $c - a = b$ ist, und nicht $c > a$, so kann nur sein $c = a$, oder $c < a$.

1. $c = a$. Die Null.

57. Vorbemerkungen. — 1) Wenn $a - a = b$, so ist $a + b = a$; d. h.: Eine Differenz, in welcher Minuend und Subtrahend gleich sind, lässt die Zahl, zu der man sie addirt, ungeändert.

2) Da $a + c = c + a$, so ist, wenn man beiderseits a und c subtrahirt,

$$a - a = c - c,$$

d. h.: Eine solche Differenz bleibt ungeändert, wenn der gemeinsame Werth von Minuend und Subtrahend sich ändert. — Man kann also dem Werthe dieser Differenz ein für allemal einen bestimmten Namen geben, und ihn durch ein bestimmtes Zeichen ausdrücken.

58. Erklärung. — Eine Differenz, in welcher Minuend und Subtrahend gleich sind, wird Null genannt, und durch 0 bezeichnet.

$$a - a = 0.$$

*) Die allgemeinen Eigenschaften der 7 Rechnungsarten bleiben auch für diese neuen Zahlen in Geltung, wie sich zeigt, wenn man diese Zahlen in die Formeln, welche jene Eigenschaften ausdrücken, einsetzt.

Bedeutung der Null. — Null soll eine Zahl sein, die, zu einer anderen addirt, dieselbe ungeändert lässt. Da aber eine Zahl nur dann ungeändert bleiben kann, wenn man Nichts hinzuaddirt, so ist „Null“ der mathematische Ausdruck für den Begriff „Nichts“.

59. Rechnungen mit der Null. — Dieselben ergeben sich, wenn man in allen Formeln, welche von der Rechnung mit einer Differenz handeln, Minuend und Subtrahend gleich setzt. So folgt:

Aus 11: $a + (c - c) = (a + c) - c$	Null, zu einer Zahl 68.
od.: $a + 0 = a.$	10. addirt, oder von
Aus 15: $a - (c - c) = (a - c) + c$	einer Zahl subtra-
od.: $a - 0 = a.$	10. hirt, ändert deren
	Werth nicht.

Anm. Die Null kann daher als Anfangsglied dienen, an welches jede Summe sich anknüpfen lässt.

Aus 23: $(b - b)c = bc - bc$	Null, mit einer Zahl 69.
od.: $0 \cdot c = 0.$	multiplicirt, oder
Aus 31: $\frac{y - y}{c} = \frac{y}{c} - \frac{y}{c}$	durch eine Zahl di-
od.: $\frac{0}{c} = 0.$	vidirt giebt Null.

Anm. Potenzirung mit Null (aus 42) s. unter 78, Division durch Null unter 149. Da $a \cdot 0 = b \cdot 0 = 0$ ist, so darf man die Regel 28 nie in der Weise anwenden, dass man durch eine Zahl dividirt, die Null ist oder sein kann. Aus $a \cdot c = b \cdot c$ folgt $ac - bc = 0$, oder $c(a - b) = 0$. Ist nun c gleich Null, so ist diese Formel richtig, auch ohne dass $a = b$ ist. Dagegen würde man durch Anwendung von 28 nur $a = b$ finden.

Aus 44: $(b - b)^2 = b^2 - 2b^2 + b^2$	Null, mit einer Zahl 70.
od.: $0^2 = 0$, desgl.	potenzirt oder radi-
$0^n = 0; \sqrt[n]{0} = 0.$	cirt giebt Null.

Aus 69 folgt durch Anwendung des Begriffs der Division $\frac{0}{0} = c$; d. h.: $\frac{0}{0}$ kann jede Zahl bedeuten. Dieser Aus- 71.
druck hat also die Bedeutung eines Buchstabens, und kann daher in einer Bestimmungsgleichung (vgl. Nr. 2) einen einzigen bestimmten Werth haben. Die Ermittlung dieses Werthes ist eine Aufgabe der höheren Mathematik.

Aus 70 folgt durch Anwendung des Begriffs der Logarithmirung ${}^0l0 = n$, d. h.: ${}^0l0$ kann jede Zahl bedeuten. 71a.

Anm. Dass $0 \cdot c = 0$, d. h. nullmal $c = 0$ ist, geht auch aus dem Begriff der Null hervor. Denn wenn man c nullmal, d. h. gar nicht, als Summand zu dem Anfangsgliede 0 setzt, so erhält man eben Null. (S. Anm. z. 68.)

2. $c < a$. Die negativen Zahlen.

60. Vorbemerkungen. — 1) Wenn in der Gleichung $c - a = b$ die Zahl $c < a$ sein soll, so kann man $a = c + d$ setzen, und erhält: $c - (c + d) = b$, oder (13) $c - c - d = b$, oder $0 - d = b$; d. h.: Jede Differenz, in welcher der Minuend kleiner ist als der Subtrahend, kann in eine andre verwandelt werden, deren Minuend Null ist.

2) Aus $0 - d = b$ folgt $b + d = 0$; d. h.: Eine solche Differenz kann stets mit einer bestimmten Zahl zur Summe Null vereinigt werden.

61. Erklärungen. — 1) Eine Differenz, deren Minuend Null ist, wird negative Zahl genannt, und mit Weglassung der Null geschrieben.

$$0 - a = (-a).$$

Anm. Jeder absoluten Zahl entspricht hiernach eine negative, sodass durch Einführung der negativen Zahlen das Gebiet der Zahlen verdoppelt wird.

2) Im Gegensatze zu den negativen Zahlen heissen die absoluten Zahlen positive Zahlen, und werden in dieser Eigenschaft als Summen geschrieben, deren erster Summand Null ist (68) und weggelassen wird.

$$a = 0 + a = (+a).$$

Anm. Eine positive Zahl ist also eine zu Null addirte, eine negative Zahl eine von Null subtrahirte absolute Zahl. Wegen dieser Beziehung zur Null heissen positive und negative Zahlen „relative Zahlen“. — Die Grenze zwischen positiven und negativen Zahlen bildet die Null. Da $0 + 0 = 0$, und $0 - 0 = 0$, so ist $+0 = 0$ und $-0 = 0$; d. h.: Null kann sowohl für positiv wie für negativ angesehen werden. — Die Reihe der natürlichen Zahlen kann nicht nur von irgend einer Zahl an durch wiederholte Addition der Einheit beliebig fortgesetzt werden, sondern auch durch wiederholte Subtraction derselben, wodurch man schliesslich zur Null und den negativen Zahlen kommt. Z. B. lautet diese Reihe, von 3 anfangend: 3, 2, 1, 0, -1 , -2 , ...

3) Als Bestandtheile der positiven und negativen Zahlen heissen die Zeichen $+$ und $-$ Vorzeichen. — Zahlen mit gleichen Vorzeichen heissen gleichstimmig, zwei Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen: entgegengesetzt.

Bedeutung der negativen Zahlen. — Eine negative Zahl soll, zu der entsprechenden positiven addirt, die Summe Null

geben. Daher werden zwei durch Zahlen darstellbare Handlungen oder deren Resultate, die sich gegenseitig aufheben, d. h. das Resultat Null geben, diejenigen Begriffe sein, die ihren mathematischen Ausdruck in der negativen Zahl $-a$ und der positiven $+a$ finden.

Anm. Z. B.: Einnahme und Ausgabe, Vermögen und Schulden, Bewegung nach vorwärts und nach rückwärts (Schritte, Thermometerscala).

62. Rechnungen mit den negativen Zahlen. — Dieselben ergeben sich, wenn man in allen Formeln, welche von der Rechnung mit einer Differenz handeln, den Minuend gleich Null setzt. So folgt:

Aus 11: $a + (0 - c) = (a + 0) - c$	Eine negative Zahl wird 72.
od.: $a + (-c) = a - c.$	68. addirt oder subtrahirt,
Aus 15: $a - (0 - c) = (a - 0) + c$	indem man die entspre-
od.: $a - (-c) = a + c.$	68. chende positive (abso-
	lute) subtrahirt oder
	addirt.

Anm. Hiernach kann jede Differenz als Summe einer positiven und einer negativen Zahl dargestellt werden. Ferner sieht man, dass eine positive oder negative Zahl addirt wird, indem man sie mit ihrem Vorzeichen, dagegen subtrahirt wird, indem man sie mit entgegengesetztem Vorzeichen hinzuschreibt. Man kann also einen Ausdruck wie $a - b + c$ entweder als Resultat der Vereinigung der absoluten Zahlen a, b, c ansehen, wobei $+$ und $-$ Rechnungszeichen sind, oder als Summe der positiven und negativen Zahlen $+a, -b, +c$, wobei die Rechnungszeichen fehlen.

Setzt man in den Formeln 7, 11, 13, 15 $a = 0$, so folgt: 73.

$(+b) + c = + (b + c)$	Zwei gleichstimmige Zahlen
$(+x) - c = + (x - c)$	vereinigt man (zu einer relativen
$(-b) - c = - (b + c)$	Zahl), indem man der Summe
$(-x) + c = - (x - c)$	der absoluten Zahlen ihr ge-
oder:	meinsames Vorzeichen giebt,
$+b + c = + (b + c)$	zwei entgegengesetzte, indem
$+x - c = + (x - c)$	man der Differenz der abso-
$-b - c = - (b + c)$	luten Zahlen das Vorzeichen
$-x + c = - (x - c).$	der grösseren giebt.

Anm. Diese relativen Zahlen besitzen also die Eigenschaft der speciellen, dass man mehrere von ihnen zu einer einzigen Zahl von derselben Art vereinigen kann. — Soll man eine grössere Anzahl positiver und negativer Zahlen vereinigen, so vereinigt man erst alle positiven, dann alle negativen nach dem ersten, und schliesslich die beiden Resultate nach dem zweiten Theile der Regel 73. Aus der letzten Formel folgt noch, dass eine Differenz durch Vertauschung von Minuend und Subtrahend entgegengesetztes Vorzeichen erhält.

74. Aus 23: $0 \cdot c - bc = (0 - b)c$
 oder: $-bc = (-b)c.$

Aus 31: $\frac{0}{c} - \frac{y}{c} = \frac{0 - y}{c}$
 oder: $-\frac{y}{c} = \frac{-y}{c}.$

Eine negative Zahl wird multiplicirt oder dividirt, indem man die absoluten Zahlen multiplicirt oder dividirt, und dem Resultat das negative Zeichen giebt.

Setzt man in den Formeln 25 a, d, x gleich Null, so folgt:

75. 1) $(+b)(+e) = +be; +b = \frac{+be}{+e};$
 2) $(+b)(-e) = -be; +b = \frac{-be}{-e};$
 3) $(-b)(+e) = -be; -b = \frac{-be}{+e};$
 4) $(-b)(-e) = +be; -b = \frac{+be}{-e}.$

Product und Quotient von zwei gleichstimmigen Zahlen sind positiv, von zwei entgegengesetzten negativ.

Hieraus folgt: Bildet man der Reihe nach die Potenzen einer negativen Zahl, so sind dieselben abwechselnd positiv und negativ. Nennt man die durch 2 theilbaren Exponenten gerade, die übrigen ungerade, und die Potenzen ebenfalls gerade oder ungerade, je nach der Beschaffenheit ihrer Exponenten, so kann man sagen: Alle geraden Potenzen einer negativen Zahl sind positiv, alle ungeraden negativ.

Anm. Da man alle geraden Zahlen durch $2n$, alle ungeraden durch $2n + 1$ bezeichnen kann, so lässt sich die letzte Regel durch die Formeln ausdrücken:

$$(-b)^{2n} = +b^{2n}; (-b)^{2n+1} = -b^{2n+1}.*)$$

Potenzirung mit einer negativen Zahl (aus 42) s. unter 84.

b. Erweiterung des Zahlbegriffes durch Division.

Wenn $\frac{c}{a} = b$ ist, und nicht a ein Factor von c , so kann $a = c$, oder c ein Factor von a sein.

Anm. Ein Quotient, für welchen keiner dieser drei Fälle gilt, lässt sich, wie unten sich zeigen wird, immer auf den dritten Fall zurückführen.

*) Wendet man auf diese Formeln den Begriff der Radicirung an, so zeigt sich, dass Radicirung einer negativen mit einer geraden Zahl nicht vorkommen kann. Die Lösung dieser Aufgabe wird also eine neue Erweiterung des Zahlengebietes erfordern. (Vgl. Nr. 101 ff.)

3. $c = a$. Die Eins.

63. *Vorbemerkungen.* — 1) Wenn $\frac{a}{a} = b$, so ist $ab = a$;

d. h.: Ein Quotient, in welchem Dividend und Divisor gleich sind, lässt die Zahl, die man mit ihm multiplicirt, ungeändert.

2) Da $ac = ca$, so ist, wenn man beiderseits durch a und c dividirt,

$$\frac{a \cdot c}{a} = \frac{c}{1},$$

d. h.: Ein solcher Quotient bleibt ungeändert, wenn der gemeinsame Werth von Dividend und Divisor sich ändert. — Man kann also dem Werthe dieses Quotienten ein für allemal einen bestimmten Namen geben, und ihn durch ein bestimmtes Zeichen ausdrücken.

64. *Erklärung.* — Ein Quotient, in welchem Dividend und Divisor gleich sind, wird Eins genannt, und durch 1 bezeichnet.

$$\frac{a}{a} = 1.$$

Bedeutung der Eins. — Eins soll eine Zahl sein, welche jede andere, die mit ihr multiplicirt wird, ungeändert lässt. Da aber eine Zahl nur dann ungeändert bleibt, wenn man sie einmal als Summand setzt, so ist die durch obige Erklärung bestimmte „Eins“ dasselbe wie die Zahleneinheit, die schon oben (Nr. 5) dasselbe Zeichen erhielt.

Anm. Es könnte zweifelhaft scheinen, ob die Einführung der Null und der Eins wirklich eine Erweiterung des Zahlengebietes bedingt, da doch beide Zahlen sich in die Reihe der natürlichen Zahlen einfügen. Halten wir aber fest, dass nach der oben gegebenen Definition eine Zahl der Inbegriff mehrerer (also mindestens zweier) Einheiten ist, und bedenken wir, dass beide Zahlen ihre besonderen, von denen der absoluten Zahlen verschiedenen, Rechnungsgesetze haben, so tritt die Nothwendigkeit hervor, auch in der Einführung dieser Zahlen eine Erweiterung des Zahlengebietes zu erblicken.

65. *Rechnungen mit der Eins.* — Setzt man in den Formeln, welche die Rechnungen mit einem Quotienten enthalten, Dividend und Divisor gleich, so folgt:

Aus 33: $\frac{ac}{c} = a \cdot \frac{c}{c}$

oder: $a = a \cdot 1.$

Aus 37: $\frac{a}{c} \cdot c = \frac{a}{c|c}$

oder: $a = \frac{a}{1}.$

Eine Zahl, mit Eins multiplicirt, oder durch Eins dividirt, bleibt ungeändert.

29.

29.

Anm. Die Eins kann daher als Anfangsglied dienen, an welches jedes Product sich anknüpfen lässt.

$$78. \text{ Aus 42: } \frac{c^b}{c^b} = c^{b-b}$$

Eine Zahl, mit Null potenzirt, giebt Eins.

$$\text{oder: } 1 = c^0.$$

$$79. \text{ Aus 47: } \frac{b^c}{b^c} = \left(\frac{b}{b}\right)^c$$

Eins, mit einer Zahl potenzirt oder radicirt, giebt Eins.

$$\text{oder: } 1 = 1^c.$$

$$\text{Aus 54: } \frac{\sqrt[c]{y}}{\sqrt[c]{y}} = \sqrt[c]{\frac{y}{y}}$$

$$\text{oder: } 1 = \sqrt[c]{1}.$$

$$80. \text{ Aus 56: } c^{\frac{b}{b}} = \sqrt[b]{c^b}$$

52. Eine Zahl, mit Eins potenzirt oder radicirt, bleibt ungeändert.

$$\text{oder: } c^1 = c.$$

$$\text{Aus 57: } \left(\sqrt[a]{y}\right)^a = \sqrt[a]{y^a}$$

$$\text{oder: } y = \sqrt[a]{y^a}.$$

52.

$$81. \text{ Aus 64: } {}^c l y - {}^c l y = {}^c l \frac{y}{y}$$

Eins, mit einer Zahl logarithmirt, giebt Null.

$$\text{oder: } 0 = {}^c l 1.$$

Aus 78 folgt durch Anwendung des Begriffs der Radicirung $\sqrt[0]{1} = c$; d. h.: $\sqrt[0]{1}$ kann jede Zahl bedeuten. (Vgl. 71.) Durch Logarithmirung folgt 81.

Aus 79 folgt durch Anwendung des Begriffs der Logarithmirung ${}^1 l 1 = c$; d. h.: ${}^1 l 1$ kann jede Zahl bedeuten.

Aus 80 folgt durch Anwendung des Begriffs der Logarithmirung ${}^c l c = 1$, d. h.: Der Logarithmus der Grundzahl ist Eins.

Anm. Es bildet also 82_a ebenso eine Ausnahme zu 83, wie $\frac{0}{0} = c$ eine Ausnahme zu der Regel $\frac{c}{c} = 1$. — Man sieht ferner, dass 83 eine zweite Definition der Eins enthält. — Dass $c^0 = 1$ ist, geht auch aus dem Begriff der Null hervor. Denn wenn man c nullmal, d. h. gar nicht, als Factor zu dem Anfangsgliede Eins setzt, so erhält man eben Eins. (Siehe Anm. zu 77.)

4. c ein Factor von a . Die umgekehrten Zahlen.

66. *Vorbemerkungen.* — 1) Wenn in der Gleichung $\frac{c}{a} = b$ c ein Factor von a sein soll, so kann man $a = cd$ setzen, und erhält: $\frac{c}{cd} = b$, oder (35) $\frac{c|c}{d} = b$, oder $\frac{1}{d} = b$; d. h.: Jeder Quotient, in welchem der Dividend ein Factor des Divisors ist, kann in einen andern verwandelt werden, dessen Dividend Eins ist.

2) Aus $\frac{1}{d} = b$ folgt: $bd = 1$; d. h.: Ein solcher Quotient kann stets mit einer bestimmten Zahl zum Producte Eins vereinigt werden.

67. *Erklärungen.* — 1) Ein Quotient, dessen Dividend Eins ist, wird umgekehrte Zahl genannt und in unveränderter Form geschrieben.

$$\frac{1}{a}.$$

Anm. Jeder absoluten Zahl entspricht hiernach eine umgekehrte, sodass durch Einführung der umgekehrten Zahlen das Gebiet der Zahlen nochmals verdoppelt wird.

2) Im Gegensatze zu den umgekehrten Zahlen heissen die absoluten Zahlen ganze Zahlen und können in dieser Eigenschaft als Producte geschrieben werden, deren erster Factor Eins ist (77).

$$a = 1 \cdot a.$$

Anm. Durch den Hinzutritt des Factors 1 wird angedeutet, dass a eine Anzahl von Einheiten bedeutet, d. h. eine absolute Zahl ist. Dieser Factor pflegt aber weggelassen zu werden. — Wegen ihrer Beziehung zur Eins sind ganze und umgekehrte Zahlen „relative Zahlen“. — Die Grenze zwischen den ganzen und umgekehrten Zahlen bildet die Eins.

Da $1 \cdot 1 = 1$, und $\frac{1}{1} = 1$, so kann Eins sowohl für eine ganze wie für eine umgekehrte Zahl angesehen werden. — Sowohl die ganzen wie die umgekehrten Zahlen können positiv oder negativ sein, sodass also einer absoluten Zahl a bis jetzt vier relative entsprechen, nämlich

$$+a, -a, +\frac{1}{a}, -\frac{1}{a}.$$

Bedeutung der umgekehrten Zahlen. — Eine umgekehrte Zahl soll, mit der entsprechenden ganzen multiplicirt, das Product Eins geben. Daher werden die gleichen Theile eines als Einheit betrachteten Gegenstandes einzeln diejenigen Begriffe sein, deren mathematischer Ausdruck eine umgekehrte

Zahl ist. Denn jeder dieser Theile, so oft als Summand gesetzt, als die Anzahl der Theile beträgt, bringt die gegebene Einheit wieder hervor. Es ist also die umgekehrte Zahl ein Theil der Einheit, und die entsprechende ganze Zahl die Anzahl der Theile, welche diese Einheit bilden.

68. *Rechnungen mit den umgekehrten Zahlen.* — Da die umgekehrten Zahlen in ihrer Form sich von den gewöhnlichen Quotienten nicht unterscheiden, so gilt dasselbe auch von den Rechnungen mit ihnen. Die Formeln der Rechnung mit Quotienten (in denen man den Dividend gleich Eins zu setzen hat) erleiden nur diejenigen Veränderungen, welche die Rechnung mit der Eins verursacht. Es folgen daher hier nur diejenigen Formeln, die zu besonderen Bemerkungen Anlass geben. Es folgt:

83a. Aus 33: $\frac{a}{c} = a \cdot \frac{1}{c}$; d. h.: Jeder Quotient kann als Product einer ganzen und einer umgekehrten Zahl geschrieben werden.

Anm. Hiernach sind auch diejenigen Quotienten, welche keinem der im Anfang dieses Abschnittes (b) aufgezählten Fälle angehören, (die Brüche) auf diese Fälle zurückgeführt. Ein Bruch ist also das Product einer ganzen und einer umgekehrten Zahl. — Setzt man in 83a $c = a$, so folgt: $1 = a \cdot \frac{1}{a}$. Lässt man in dieser Formel rechts den Factor a

grösser werden, so muss der andre Factor $\frac{1}{a}$ kleiner werden, damit das Product seinen Werth 1 behält. Eine umgekehrte Zahl ist also um so kleiner, je grösser ihr Divisor ist. — Dies folgt auch aus der oben erörterten Bedeutung der umgekehrten Zahlen.

83b. Aus 56: $c^{\frac{1}{b}} = \sqrt[b]{c}$; d. h.: Jede Wurzel kann als Potenz mit umgekehrtem Exponenten geschrieben werden.

84. Aus 42: $\frac{c^0}{c^b} = c^{0-b}$ Eine Potenz mit negativem Exponenten ist gleich der umgekehrten Potenz mit positivem Exponenten, oder der ganzen Potenz mit positivem Exponenten, aber umgekehrter Grundzahl.

oder: $\frac{1}{c^b} = c^{-b}$ 78.

oder: $\left(\frac{1}{c}\right)^b = c^{-b}$ 79. 48.

Anm. Man kann also das Vorzeichen des Exponenten ändern, wenn man gleichzeitig entweder die Potenz oder nur ihre Grundzahl umkehrt. — Die Bildung und Deutung der übrigen Formeln (aus 37, 47, 54, 56, 57, 64) sei zur Übung empfohlen. — (Aufgaben: Hofmann 2. Fünfter Abschnitt I. II. — Bardey XII.)

c. Erweiterung des Zahlbegriffes durch Radicirung und Logarithmirung.

69. Wenn $\sqrt[a]{c} = b$, also ${}^b l c = a$, und nicht c im ersten Falle ein Product von a gleichen Factoren, im zweiten Falle ein Product von lauter gleichen Factoren b ist, so ist b , resp. a nicht mehr eine Zahl in dem ursprünglich festgestellten Sinne. — Heben wir nun wieder den Fall hervor, dass die beiden zu vereinigenden Zahlen gleich sind, so folgt erstens, da b^a nicht gleich a^b , dass auch $\sqrt[b]{b^a}$ ungleich a , und $\sqrt[b]{b}$ ungleich $\sqrt[a]{a}$ ist. Daher ist es nicht zulässig, $\sqrt[a]{a}$ durch ein Zeichen von bestimmter Bedeutung zu ersetzen. Zweitens ist ${}^a l a = 1$ (83), also gleich einer schon bekannten Zahl. Dieser Fall liefert also keine Erweiterung des Zahlbegriffes.

5. Die irrationalen Zahlen.

70. *Vorbemerkung.* — Während die negativen Zahlen als Differenzen mit dem Minuend 0, und die umgekehrten als Quotienten mit dem Dividend 1 erschienen, lassen sich die Wurzeln und Logarithmen, welche der oben gestellten Bedingung nicht genügen, nicht in ähnlicher Weise auf eine einzige Zahl beziehen,*) erfordern also zu ihrer Darstellung stets zwei absolute Zahlen.

71. *Erklärungen.* — 1) Wurzeln und Logarithmen, die nicht Zahlen in dem bisher festgestellten Sinne sind, werden irrationale Zahlen genannt und in unveränderter Form geschrieben.

*) Denn für Wurzeln hat die Grenzzahl $\sqrt[a]{a}$, wie oben gezeigt, überhaupt keinen festen Werth. Für Logarithmen ist zwar ${}^c l c = 1$, und, wenn man in der Formel ${}^c l y = {}^x l y \cdot {}^c l x$ $y = c$ setzt: $1 = {}^x l c \cdot {}^c l x$, also, wenn ${}^c l x = z$ ist, ${}^x l c = \frac{1}{z}$. Aber keine der Formeln für die umgekehrten Zahlen zeigt, wie ein beliebiger Logarithmus als Potenz zwischen einer einfachen und einer umgekehrten Zahl dargestellt werden kann. Demnach kann auch keiner der hier betrachteten Logarithmen durch eine auf Eins bezogene Zahl dargestellt werden.

2) Im Gegensatze zu den irrationalen Zahlen heissen die absoluten Zahlen rationale Zahlen.

Anm. Sowohl die rationalen wie die irrationalen Zahlen können positiv oder negativ sein. Es entsprechen aber einer absoluten Zahl a unzählige irrationale, da die Bestimmung der irrationalen Zahl noch eine zweite, beliebig zu wählende Zahl b erfordert, die wieder mit a in vierfacher Weise durch Radicirung oder Logarithmirung verbunden werden kann, während schliesslich noch jede dieser Zahlen positiv oder negativ sein kann. Einem Paar rationaler Zahlen entsprechen also im Ganzen 8 irrationale.

Setzt man $b^{(c^a)} = x$, und $c^a = \sqrt[y]{}$ (vgl. Anm. zu 67 am Ende), so

folgt $\sqrt[y]{} = {}^b_l x$,

woraus hervorgeht, dass die aus Wurzeln und die aus Logarithmen hervorgehenden irrationalen Zahlen von gleicher Beschaffenheit sind, also nicht noch durch besondere Namen unterschieden zu werden brauchen. Denn wenn x und b beliebige absolute Zahlen sind, so ist c^a eine irrationale Zahl, und einerseits gleich einer Wurzel, andererseits gleich einem Logarithmus.

Die Bedeutung der irrationalen Zahlen wird erst später (in den Anwendungen der Arithmetik auf die Raumlehre) hervortreten.

Die Rechnungen mit irrationalen Zahlen unterscheiden sich nicht von denjenigen mit gewöhnlichen Wurzeln und Logarithmen.

Zweite Abtheilung.

Die zusammengesetzten Zahlen.

72. Uebersicht. Die Vereinigung eines Resultates mit einer Zahl lässt sich auf eine beliebige Menge von Zahlen ausdehnen, indem jedes erhaltene Resultat aufs Neue durch irgend eine Rechnungsart mit einer neuen Zahl sich vereinigen lässt. Dabei finden nur diejenigen Beschränkungen statt, welche die Unvollständigkeit der bisher angegebenen Regeln auferlegt. — Es wird sich nun herausstellen, dass eine beliebige Folge von Rechnungen, an beliebigen Zahlen vorgenommen (mit Ausnahme eines Falles) stets auf ein Resultat führt, welches sich einer allgemeinen Form unterordnen lässt, d. h.: dass es für die Vereinigung verschiedener Rechnungsarten (die wir die zusammengesetzte Rechnungsart nennen können) ebenso eine allgemeine Form giebt, wie z. B. $a + b = c$ die für die Addition

aufgestellte war. — Hierauf wird zu untersuchen sein, wie mit solchen zusammengesetzten Zahlen gerechnet wird, und ob der Vereinigung von Zahlen zu einer solchen allgemeinen Form eine entgegengesetzte Rechnungsart entspricht, endlich, ob dieselbe zu einer fernerer Erweiterung des Zahlbegriffes führen wird.

Der allgemeine Ausdruck einer zusammengesetzten Zahl wird die Form einer Summe erhalten, deren Glieder im Allgemeinen willkürlich gebildet werden können. In einem besonderen Falle jedoch wird sich herausstellen, dass diese Glieder, eines aus dem anderen, nach einem bestimmten Gesetze gebildet werden können. Diese specielle Art zusammengesetzter Zahlen wird eine besondere Betrachtung erfordern.

A. Die Polynome.

73. Reduction eines zusammengesetzten Ausdrucks auf eine allgemeine Form. — 1) Mit Hilfe der negativen und umgekehrten Zahlen lassen sich die Resultate der indirecten Rechnungen (mit Ausnahme der Logarithmen) in solche der directen verwandeln. Denn

a) jede Differenz lässt sich als Summe einer positiven und einer negativen Zahl schreiben (72),

b) jeder Quotient als Product einer ganzen und einer umgekehrten Zahl (83a),

c) jede Wurzel als Potenz mit umgekehrtem Exponenten (83b).

Anm. Logarithmen allein sind auf diesem Wege nicht zu entfernen.

2) Die Anordnung der drei directen Rechnungen erfolgt auf Grund folgender Bemerkungen:

a) Ein Product von Summen lässt sich stets als eine Summe von Producten darstellen (25).

b) Eine Potenz von Producten lässt sich stets als ein Product von Potenzen darstellen. $(ab)^{pq} = a^{pq} \cdot b^{pq}$ (46).

Hiernach lässt sich jeder zusammengesetzte Ausdruck, der keine Logarithmen enthält, darstellen als eine Summe von Producten von Potenzen.

74. Erklärungen. — 1) Jeder nur mittelst der 6 ersten Rechnungsarten zusammengesetzte Ausdruck heisst algebraisch, jeder andere transcendent.

2) Eine Summe von Producten von Potenzen heisst Polynom. Die allgemeine Form des Polynoms (Gleichung der zusammengesetzten Rechnungsart) lautet daher:

$$a_1^{\alpha_1} b_1^{\beta_1} \dots + a_2^{\alpha_2} b_2^{\beta_2} \dots + \dots = X.$$

3) Die Summanden heissen Glieder des Polynoms. *)

75. Vereinfachungen der allgemeinen Form des Polynoms. —

1) Man kann in jedem Gliede eine einzige Potenz als solche bezeichnen, das Product der übrigen aber durch einen Buchstaben ausdrücken. — Letzterer heisst dann der Coefficient des Gliedes.

$$ax^{\alpha} + by^{\beta} + \dots = X.$$

2) Man kann in allen Gliedern Potenzen mit derselben Grundzahl (x) hervorheben, und diejenigen Glieder, welche eine solche Potenz nicht enthalten, in einen Buchstaben zusammenfassen. Man kann ferner diesem Buchstaben (nach 78 und 77) den Factor x^0 hinzufügen, und die Glieder so ordnen, dass die Exponenten die aufsteigende oder absteigende Reihe der natürlichen Zahlen bilden. Das Polynom heisst in diesem Falle: nach steigenden oder fallenden Potenzen von x geordnet. Demnach lautet die einfachste Form des Polynoms (Normalform):

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = X.$$

Anm. Zum ersten Gliede kann man sich also den Factor x^0 , und im zweiten zu x den Exponenten 1 hinzudenken. — Das Glied X rechts kann man (nach 10) nach links bringen und mit demjenigen Gliede vereinigen, welches dieselbe Potenz von x enthält wie X . — Da die Zahlen a auch den Werth Null haben können, so sind in der Normalform auch solche Polynome enthalten, in deren Gliedern nicht alle Potenzen von x von der 0^{ten} bis zur n ^{ten} enthalten sind. — Ein Polynom kann auch gleichzeitig nach Potenzen mehrerer Buchstaben geordnet sein, namentlich nach steigenden des einen und fallenden eines andern. — Endlich ist leicht zu sehen, dass in der Normalform auch die einfachen Resultate der 6 ersten Rechnungsarten als specielle Fälle enthalten sind.

76. Rechnungen mit Polynomen. **) — In der Rechnung werden die Polynome wie Summen, ihre Glieder wie Producte behandelt. Jedes Glied besteht aus drei Theilen, dem Vorzeichen, dem Coefficienten, der Buchstabengrösse (Potenz oder Product von Potenzen). Glieder mit gleicher

*) Ein Polynom, welches nur zwei Glieder enthält, wird auch Binom genannt.

**) Beispiele s. am Schluss des Buches in der „Uebersicht der Formeln und Regeln“.

Buchstabengrösse (gleichnamige Glieder) können nach Beendigung der Rechnung (nach 24 und 73) zu einem Gliede vereinigt werden.

Anm. Der bequemeren Vereinigung wegen pflegt man schon während der Rechnung die gleichnamigen Glieder unter einander zu schreiben. In den folgenden Rechnungen ist überall die übliche Anordnung der Rechnung zur Anschauung gebracht.

Addition von Polynomen.

$$\begin{array}{r} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \\ b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots \\ \hline (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots \end{array}$$

Ein Polynom wird addirt, 85.
indem man seine Glieder mit ihren Vorzeichen hinzuschreibt. (7, Anm. z. 72.)

Subtraction von Polynomen.

$$\begin{array}{r} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \\ - b_0 - b_1 x - b_2 x^2 - \dots \\ \hline (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + (a_2 - b_2)x^2 + \dots \end{array}$$

Ein Polynom wird subtrahirt, 86.
indem man seine Glieder mit entgegengesetzten Vorzeichen hinzuschreibt. (13, Anm. z. 72.)

(Aufgaben: Hofmann 2. Zweiter Abschn. I. 37—44.)

Multiplication von Polynomen.

$$\begin{array}{r} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \\ b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots \\ \hline a_0 b_0 + a_1 b_0 x + a_2 b_0 x^2 + \dots \\ \quad + a_0 b_1 x + a_1 b_1 x^2 + \dots \\ \quad \quad + a_0 b_2 x^2 + \dots \\ \hline a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)x + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2)x^2 + \dots \end{array}$$

Ein Polynom wird mit 87.
einem anderen multiplicirt, indem man jedes Glied des einen mit jedem Gliede des anderen multiplicirt und die Producte addirt. (25).

(Aufgaben: Hofmann 2. Zweiter Abschn. III.)

Division von Polynomen.

Da die Aufgabe, durch eine Summe zu dividiren, oben unerledigt geblieben ist (vgl. Anm. zu 32), so lässt sich die Aufgabe, ein Polynom durch ein anderes zu dividiren, nur dadurch lösen, dass man das zweite Polynom wiederholt vom ersten subtrahirt, und die Anzahl der Subtrahenden bestimmt. Denn nach einer früheren Bemerkung (Nr. 26) kann die Division als eine wiederholte Subtraction betrachtet werden. — Der kürzeren Rechnung wegen subtrahirt man aber jedesmal ein Vielfaches des Subtrahend und wählt den Factor so, dass

das jedesmalige erste Glied des Minuend verschwindet. Dieser Factor muss also der Quotient aus dem ersten Gliede des Minuend und dem ersten Gliede des Subtrahend sein. — Nun sind 2 Fälle möglich: 1) Der Divisor ist ein Factor des Dividend. Dann bleibt nach einer Anzahl von Subtractionen der Rest Null, und die Summe der oben erwähnten Factoren ist der genaue Quotient. 2) Der Divisor ist kein Factor des Dividend. Dann bleibt nach einer Reihe von Subtractionen vom Dividend ein nicht dividirbarer Rest übrig, an dem man die Division nur andeuten kann. (So in der ersten Formel der Anm. zu 32: $\frac{bc + x}{e} = b + \frac{x}{e}$). — Da aber andererseits die Division eine wiederholte Subtraction ist, so kann man diese Subtraction nach der oben gegebenen Vorschrift fortsetzen und immer neue Glieder des Quotienten bilden. Dieses Verfahren hat kein Ende; denn bliebe nach irgend einer Subtraction der Rest Null, so wäre der bis dahin ermittelte Quotient das genaue Resultat der Division, also der Divisor ein Factor des Dividend, gegen die Annahme. Von dieser besonderen Form des Quotienten wird weiter unten die Rede sein. Vgl. Anm. zu 148.)

Anm. Summe, Differenz und Product zweier Polynome ist stets wieder ein Polynom, der Quotient dagegen nur dann, wenn der Divisor ein Factor des Dividend ist. Andernfalls muss der Begriff des Polynoms ebenso erweitert werden, wie früher der der einfachen Zahl. Dies wird weiter unten geschehen.

Divisor.	Quotient.
$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n.$	$b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n.$
Dividend.	
$ \begin{array}{r} a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \dots + a_nb_nx^{2n} \\ - a_0b_0 \overline{+} \quad \quad \quad a_1b_0 x \overline{+} \quad \quad \quad a_2b_0 x^2 \overline{+} \dots \\ \hline \quad \quad \quad + a_0b_1 x + \quad \quad \quad (a_0b_2 + a_1b_1)x^2 + \dots \\ \quad \quad \quad \overline{+} a_0b_1 x \overline{+} \quad \quad \quad a_1b_1 x^2 \overline{+} \dots \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad \quad + a_0b_2 x^2 + \dots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \overline{+} a_0b_2 x^2 \overline{+} \dots \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad \quad \dots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \dots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \dots \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad \quad \dots + a_nb_nx^{2n} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \dots \overline{+} a_nb_nx^{2n} \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0. \end{array} $	

Um ein Polynom durch ein anderes zu dividieren, 88. *dividirt* man das erste Glied des Dividend durch das erste Glied des Divisor, *multiplcirt* den Quotient mit dem ganzen Divisor, *subtrahirt* das Product vom Dividend, und fängt mit dem Rest als neuem Dividend die Rechnung wieder von vorn an. Der Quotient der beiden Polynome ist dann die Summe der einzelnen Quotienten.

Anm. Durch Ausführung der Division $\frac{a^n - b^n}{a - b}$ gelangt man zu 45a. (Aufgaben: Hofmann 2. Zweiter Abschn. IV.)

Potenzirung eines Polynoms mit 2.

Die Aufgabe, eine Summe mit einer Zahl zu potenziren, wurde oben nur für die Exponenten 2 und 3 gelöst (44). Da eine in Worten ausgedrückte Regel für jeden Exponenten anders ausgedrückt werden müsste, so möge es genügen, dieselbe für den einfachsten Fall (2) auszusprechen. Betrachtet man in der ersten der Formeln 45b die Buchstaben $a, b, \dots$ als Glieder eines Polynoms, so erhält man die Regel:

Das Quadrat eines Polynoms ist gleich der Summe 89. der Quadrate aller Glieder, vermehrt um die doppelten Producte je zweier.

Radicirung eines Polynoms mit 2.

Nach einer früheren Bemerkung (Nr. 41) kann die Radicirung als eine wiederholte Division betrachtet werden. Hier-nach lässt sich die Radicirung eines Polynoms in ähnlicher Weise wie die Division durch ein fortgesetztes Verfahren ausführen, welches ein Ende hat oder nicht, je nachdem das Polynom aus der durch den Exponenten bestimmten gleichen Anzahl von Factoren besteht oder nicht. Dieses Verfahren ist, wie das entsprechende bei der Potenzirung, für jeden Exponenten ein anderes. Es genügt, dasselbe für den einfachsten Fall (2) festzustellen, da es für die übrigen Fälle zu verwickelt und (wie später (Nr. 167) gezeigt wird) für die Anwendungen entbehrlich ist. Aus der dritten Formel 45b,

$(a+b+c+d+\dots)^2 = a^2 + b(2a+b) + c[2(a+b)+c] + d[2(a+b+c)+d] + \dots$ ergibt sich die Bestimmung der Glieder $a, b, c, \dots$, wenn das Polynom der rechten Seite gegeben ist, (Bestimmung der „Quadratwurzel“) wie folgt:

Soll ein Polynom mit 2 radicirt werden, so ist 90. das *erste* Glied des Resultates die Quadratwurzel aus

dem ersten Gliede des Polynoms. Dies Glied wird subtrahirt. Um das *zweite* Glied zu finden, dividirt man das erste Glied des Restes durch das doppelte erste Glied des Resultates. Dann multiplicirt man den Quotienten mit sich selbst und dem doppelten bisherigen Resultat und subtrahirt dies Product von dem gegebenen Polynom. Alle *übrigen* Glieder werden wie das zweite gefunden.

Anm. Denken wir uns zu $a, b, c, d \dots$ der Reihe nach die Factoren $x^1, x^2, x^4, x^8, \dots$ hinzugefügt, so sind, wie leicht zu sehen, beide Polynome nach steigenden Potenzen von x geordnet. Man muss also, um das Resultat geordnet zu erhalten, auch das gegebene Polynom ordnen.

(Aufgaben: Hofmann 2. Vierter Abschn. II. — Bardey XIV. B.)

B. Die Proportionen.

77. *Vorbemerkung.* — Durch Gleichsetzung zweier Polynome entsteht eine Gleichung. Dieselbe wird in einfachster Gestalt erscheinen, wenn statt der Polynome nur Summen, Differenzen, Producte u. s. w., aus je zwei Buchstaben gebildet, gegeben sind. Bei derartigen Gleichungen wird es sich im Allgemeinen nicht um die Bestimmung eines Buchstabens durch die übrigen, sondern um die Umformungen handeln, denen sie mittelst der Regeln 6, 9, 21, 28, 40, 51 unterworfen werden können, ohne dass ihre beiden Seiten die Gleichheit der Gestalt verlieren.

78. *Erklärungen:* 1) Eine Gleichung, in welcher jede Seite nur zwei Zahlen, und zwar durch dieselbe Rechnung verbunden, enthält, heisst Proportion, und zwar von 1., 2. oder 3. Stufe, je nachdem die Rechnung 1. oder 2. oder 3. Stufe ist.

2) Die vier Zahlen heissen Glieder der Proportion, und zwar die erste und letzte (in der Reihenfolge des Schreibens) äussere, die beiden mittleren innere, die beiden ersten auf jeder Seite vordere, die beiden letzten hintere Glieder. Jedes Glied heisst die vierte Proportionale der drei anderen.

1. Die Proportion erster Stufe (arithmetische P.).

79. *Die allgemeine Form* dieser Proportion ist

$$1a) \quad a + b = c + d.$$

Subtrahirt man auf jeder Seite die Summe der beiden inneren Glieder, so folgt:

$$1b) \quad a - c = d - b;$$

d. h.: Eine Proportion aus zwei Summen kann in eine 91. andere aus zwei Differenzen bestehende verwandelt werden, und umgekehrt.

80. Eigenschaften der Proportion erster Stufe. —

1) Vertauscht man in 1a) oder 1b) die rechte Seite mit der linken, so folgt:

$$2a) c + d = a + b; \quad 2b) d - b = a - c;$$

d. h.: Man kann die beiden inneren Glieder mit den 92. beiden äusseren vertauschen.

2) Vertauscht man in 1a) beiderseits die Summanden, und multiplicirt 1b) mit -1 , so folgt:

$$3a) b + a = d + c; \quad 3b) c - a = b - d;$$

d. h.: Man kann die beiden vorderen mit den beiden 93. hinteren Gliedern vertauschen.

3) Durch Vergleichung von 2a) mit 3a) und von 2b) mit 3b) folgt:

Man kann die Proportion, statt von links nach 94. rechts, auch von rechts nach links lesen.

81. Besondere Eigenschaft der Differenz-Proportion. —

4) Subtrahirt man in 1a) auf jeder Seite die Summe der beiden hinteren Glieder, so folgt:

$$1c) a - d = c - b;$$

d. h. wenn man 1c) mit 1b) vergleicht: In jeder Differenz- 95. Proportion kann man die beiden inneren oder [nach Regel 1)] die beiden äusseren Glieder mit einander vertauschen.

Anm. In welcher Regel lässt sich der Uebergang von 1b in 1a aussprechen?

82. Stetige Proportion. — Eine Differenz-Proportion heisst stetig, wenn ihre inneren (oder äusseren) Glieder einander gleich sind. Allgemeine Form der stetigen arithmetischen Proportion:

$$a - x = x - b.$$

Das mittlere Glied x heisst das arithmetische Mittel (mittlere arithmetische Proportionale) zwischen a und b . Man findet:

$$x = \frac{a + b}{2};$$

d. h.: Das mittlere Glied der stetigen arithmetischen 96. Proportion ist gleich der halben Summe der äusseren

Glieder. Oder: Das arithmetische Mittel zweier Zahlen ist gleich ihrer halben Summe.

Anm. Ist $x = \frac{a+b}{2}$ und $y = \frac{a-b}{2}$, so erhält man:

$$x + y = a; \quad x - y = b;$$

97. d. h.: Addirt man die halbe Differenz zweier Zahlen zu ihrer halben Summe, so erhält man die grössere der beiden Zahlen. Subtrahirt man die halbe Differenz zweier Zahlen von ihrer halben Summe, so erhält man die kleinere der beiden Zahlen.

83. Erweiterung. — Die stetige Proportion $a - x = x - b$ kann geschrieben werden:

$$(x - a) + (x - b) = 0.$$

Nun kann man verallgemeinernd die Gleichung aufstellen:

$$(x - a_1) + (x - a_2) + \dots + (x - a_n) = 0,$$

woraus folgt:

$$x = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Dann heisst x das arithmetische Mittel der Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$.

98. Und man hat die Regel: Das arithmetische Mittel von n Zahlen ist gleich dem n^{ten} Theile ihrer Summe.

2. Die Proportion zweiter Stufe (geometrische P.).

84. Die allgemeine Form dieser Proportion ist

$$1a) \quad ab = cd.$$

Dividirt man beide Seiten durch das Product der beiden inneren Glieder, so folgt:

$$1b) \quad \frac{a}{c} = \frac{d}{b};$$

99. d. h.: Eine Proportion aus zwei Producten kann in eine andere aus zwei Quotienten bestehende verwandelt werden, und umgekehrt.

85. Eigenschaften der Proportion zweiter Stufe. —

1) Vertauscht man in 1a) oder 1b) die rechte Seite mit der linken, so folgt:

$$2a) \quad cd = ab; \qquad 2b) \quad \frac{d}{b} = \frac{a}{c};$$

100. d. h.: Man kann die beiden inneren Glieder mit den beiden äusseren vertauschen.

2) Vertauscht man in 1a) beiderseits die Factoren, und potenzirt 1b) mit -1 (vgl. 84), so folgt:

$$3a) \quad ba = dc; \qquad 3b) \quad \frac{c}{a} = \frac{b}{d};$$

d. h.: Man kann die beiden vorderen mit den beiden 101.
hinteren Gliedern vertauschen.

3) Durch Vergleichung von 2a) mit 3a) und von 2b) mit 3b) folgt: Man kann die Proportion, statt von links 102.
nach rechts, auch von rechts nach links lesen.

86. Besondere Eigenschaften der Quotienten-Proportion. —

4) Dividirt man beide Seiten von 1a) durch das Product
der beiden hinteren Glieder, so folgt:

$$1c) \frac{a}{d} = \frac{c}{b};$$

d. h., wenn man 1c) mit 1b) vergleicht: In jeder Quotienten- 103.
Proportion kann man die beiden inneren oder [nach
Regel 1)] die beiden äusseren Glieder mit einander
vertauschen.

Anm. In welcher Regel lässt sich der Uebergang von 1b) in 1a)
aussprechen?

5) Addirt oder subtrahirt man 1 auf beiden Seiten von
1b), so folgt:

$$1d) \frac{a \pm c}{c} = \frac{d \pm b}{b}. \quad 104.$$

6) Dividirt man die beiden in 5) enthaltenen Proportionen
(die sich nur durch die Zeichen $+$ und $-$ unterscheiden)
durch einander, so folgt:

$$1e) \frac{a + c}{a - c} = \frac{d + b}{d - b}. \quad 105.$$

87. Stetige Proportion. — Eine Quotienten-Proportion heisst
stetig, wenn ihre inneren (oder äusseren) Glieder einander
gleich sind. Allgemeine Form der stetigen geometrischen
Proportion:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}.$$

Das mittlere Glied x heisst das geometrische Mittel (mitt-
lere geometrische Proportionale) zwischen a und b . Man
findet

$$x = \sqrt{ab};$$

d. h.: Das mittlere Glied der stetigen geometrischen 106.
Proportion ist gleich der Wurzel aus dem Producte
der äusseren Glieder. Oder: Das geometrische Mit-
tel zweier Zahlen ist gleich der Wurzel aus ihrem
Producte.

Anm. Ist $x = \sqrt{ab}$ und $y = \sqrt{\frac{a}{b}}$, so erhält man:

$$xy = a; \frac{x}{y} = b;$$

d. h.?

88. *Erweiterung.* — Die stetige Proportion $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ kann geschrieben werden:

$$\frac{x}{a} \cdot \frac{x}{b} = 1.$$

Nun kann man verallgemeinernd die Gleichung aufstellen:

$$\frac{x}{a_1} \cdot \frac{x}{a_2} \cdots \frac{x}{a_n} = 1,$$

woraus folgt:

$$x = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

107. Dann heisst x das geometrische Mittel der Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_n$.
Und man hat die Regel: Das geometrische Mittel von n Zahlen ist gleich der n^{ten} Wurzel aus ihrem Producte.

Anm. Die Lehre von den Proportionen lässt noch andere Erweiterungen zu. — So kann man eine Reihe arithmetischer Proportionen durch Addition oder Subtraction, eine Reihe geometrischer durch Multiplication oder Division vereinigen, woraus offenbar wieder eine (zusammengesetzte) Proportion von der Art der gegebenen entsteht. Man kann ferner statt zweier Summen, Differenzen, Producte, Quotienten beliebig viele einander gleich setzen, und erhält dadurch eine fortleitende Proportion. Von den Eigenschaften dieser Proportionen ist nur folgende [der Quotienten-Proportion angehörig, eine Erweiterung von 1d)] wichtig: Ist

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$$

gegeben, so folgt, wenn man 1c) und 1d) vergleicht, für die erste Proportion $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$

$$\frac{a_1 \pm a_2}{a_2} = \frac{b_1 \pm b_2}{b_2},$$

oder:

$$\frac{a_1 \pm a_2}{b_1 \pm b_2} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3},$$

oder:

$$\frac{a_1 \pm a_2}{a_3} = \frac{b_1 \pm b_2}{b_3};$$

ferner:

$$\frac{a_1 \pm a_2 \pm a_3}{a_3} = \frac{b_1 \pm b_2 \pm b_3}{b_3},$$

u. s. w. — Schliesslich:

$$\frac{a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \dots \pm a_n}{b_1 \pm b_2 \pm b_3 \pm \dots \pm b_n} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}. \quad 108.$$

Durch Gleichsetzung zweier Potenzen würde man eine Proportion dritter Stufe erhalten. Welche Umformungen lässt dieselbe zu, und welche Eigenschaften besitzt sie?

(Zum Schluss sei wiederholt bemerkt, dass jedesmal, wenn es sich bei einer Proportion nicht um eine Umformung, sondern um Bestimmung eines ihrer Glieder handelt, die Proportion als Gleichung zu betrachten und nach den im nächsten Abschnitt gegebenen Vorschriften zu behandeln ist. Für die Arithmetik ist überhaupt die Lehre von den Proportionen von ganz untergeordnetem Interesse und findet hier nur wegen ihrer Anwendungen auf die Geometrie eine Stelle.)

C. Die Gleichungen.

89. Vorbemerkung. — Ebenso wie $a + b = x$ die Gleichung der Addition war, so kann eine Gleichung, deren linke Seite ein Polynom, deren rechte eine beliebige Zahl (auch Null) ist, als Gleichung der zusammengesetzten Rechnungsart betrachtet werden. In dieser allgemeinen Gleichungsform sind dann diejenigen der 6 ersten Rechnungsarten als besondere Fälle enthalten. — Aber ebenso, wie in der Gleichung $a + b = x$ jeder Buchstabe der linken Seite als eine zu bestimmende Grösse betrachtet werden kann, so auch in der allgemeinen Gleichung jeder Buchstabe des Polynoms. Das Verfahren, durch welches ein solcher Buchstabe bestimmt wird (und welches hiernach der Aufstellung der indirecten Rechnungsarten entspricht) heisst die Auflösung der Gleichung.

90. Erklärungen. — 1) Unter der Wurzel einer Gleichung in x versteht man diejenige Zahl, welche, in dem Polynom der linken Seite für x gesetzt, die linke Seite der rechten gleich macht.

2) x heisst die Unbekannte der Gleichung.

3) Die Wurzel einer Gleichung in x bestimmen, heisst: die Gleichung nach x auflösen.

91. Eintheilung der Gleichungen. — Eine Gleichung, in welcher die Unbekannte nur in der Grundzahl von Potenzen (nicht aber als Exponent) vorkommt, heisst algebraisch (weil die Bestimmung ihrer Wurzel nur die Anwendung der 6 ersten Rechnungsarten erfordert), jede andere transcendent. Diejenigen transcendenten Gleichungen, in welchen die Unbekannte

nur im Exponenten von Potenzen vorkommt, heissen Exponentialgleichungen.

Anm. Also nur die Art und Weise, wie die Unbekannte vorkommt, bestimmt die Natur der Gleichung. Die bekannten Grössen können beliebig algebraische oder transcendente Ausdrücke sein.

I. Algebraische Gleichungen.

92. *Reduction einer algebraischen Gleichung auf die Normalform.**) — Ebenso wie ein algebraischer Ausdruck auf das Polynom und seine Normalform sich reduciren liess, so auch eine algebraische Gleichung auf dieselbe Normalform. Die vorige Art der Redaction ist aber hier nicht anwendbar, weil Resultate, welche x enthalten, nicht durch andere Buchstaben ersetzt werden können. Vielmehr erfolgt die Reduction hauptsächlich mittelst des, die Regeln 6, 9, 21, 28, 40 umfassenden

109. Satzes: Gleiche Rechnungen mit gleichen Zahlen geben gleiche Resultate. Man kann folgende Stufen der Reduction unterscheiden:

a) Vereinfachen. — Klammern, Wurzelzeichen, unter welchen x steht, und Divisionsstriche werden entfernt, und zwar

- 1) Klammern durch Ausführung der durch sie angedeuteten Rechnung (Addition, Subtraction, Multiplication, Potenzirung).
- 2) Wurzelzeichen, indem man durch Anwendung von 6 und 10 das die Wurzel enthaltende Glied des Polynoms auf eine Seite der Gleichung allein bringt, (die Gleichung nach dieser Wurzel auflöst) und dann beide Seiten mit dem Wurzelexponenten potenzirt.
- 3) Divisionsstriche, indem man beide Seiten der Gleichung mit dem Divisor des zu beseitigenden Striches multiplicirt.

Anm. Die Reihenfolge, in der diese Vereinfachungen vorzunehmen sind, richtet sich nach der Natur der die Gleichung bildenden Ausdrücke. Im Allgemeinen empfiehlt es sich, die äusseren Zeichen, d. h. diejenigen, welche andere einschliessen, zuerst zu beseitigen.

b) Ordnen. — Durch Anwendung der Regeln 6, 9, 10 kann man beliebig Glieder der Gleichung von der einen Seite nach der andern bringen. Vergleicht man die beiden Gleichungen der Addition und Subtraction,

$$a + b = c, \quad a = c - b,$$

*) Beispiele s. am Schluss des Buches in der „Uebersicht der Formeln und Regeln“.

von denen jede aus der andern durch Anwendung dieser Regeln abgeleitet werden kann, so lassen sich die 3 Regeln in eine, für die Anwendung auf Gleichungen bequemere Regel zusammenfassen: Jedes Glied einer Gleichung kann 110. mit entgegengesetztem Vorzeichen auf die andere Seite gebracht werden. — Eine Gleichung heisst geordnet, wenn mittelst dieser Regel alle Glieder, welche x enthalten, nach links, alle anderen nach rechts gebracht sind. — Eine Gleichung heisst auf Null gebracht, wenn alle Glieder nach links gebracht sind, sodass die rechte Seite Null ist. — In beiden Fällen pflegt man das Polynom der linken Seite nach fallenden Potenzen von x zu ordnen.

c) Zusammenfassen. — Glieder, welche gleich hohe Potenzen von x enthalten, werden durch Anwendung von 24 zu einem Gliede zusammengefasst, indem man die Potenz von x als gemeinsamen Factor heraussetzt.

d) Dividiren. — Alle Glieder der Gleichung werden durch den Coefficienten desjenigen Gliedes dividirt, welches die höchste Potenz von x enthält.

Anm. Ist dieses Glied negativ, so dividirt man durch den negativ genommenen Coefficienten, oder multiplicirt erst mit (-1) , oder kehrt die Vorzeichen aller Glieder um, wodurch jenes Glied jedesmal positiv wird.

Die durch diese Reductionen hergestellte Normalform der Gleichung lautet nun:

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x = a_0.$$

Der höchste in der Normalform vorkommende Exponent von x heisst der Grad der Gleichung. Demnach ist eine Gleichung vom n^{ten} Grade eine solche, in deren Normalform keine höhere Potenz von x als die n^{te} vorkommt. Hierauf beruht die

93. Eintheilung der algebraischen Gleichungen in Gleichungen vom 1., 2., 3., ... Grade.

Anm. Der Grad einer Gleichung ist stets eine ganze positive Zahl. Denn enthielte ein Glied die Potenz x^{-p} , so würde man $\frac{1}{x^p}$ dafür schreiben, und den Divisor nach a) 3) beseitigen. Enthielte aber ein Glied die Potenz $x^{\frac{1}{p}}$, so würde man $\sqrt[p]{x}$ dafür schreiben, und die Wurzel nach a) 2) beseitigen. — Irrationale Wurzeln als Exponenten müssen (nach Anm. zu 60) ausgeschlossen werden, desgl. irrationale Logarithmen (nach Anm. zu 67).

94. Auflösung der algebraischen Gleichungen. (Vorbemerkungen.) — Eine Gleichung ist gelöst, wenn auf der linken

Seite nur x , auf der rechten Seite ein Ausdruck steht, welcher x nicht enthält. — Von den Coefficienten $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ kann einer oder mehrere gleich Null sein. Hierbei sind folgende Fälle besonders wichtig:

a) $a_0 = 0$. Dann kann man die ganze Gleichung durch x dividiren, also ihren Grad um 1 erniedrigen. Ist ausserdem die Reihe der folgenden Grössen $a_1, a_2, \dots, a_p$ gleich Null, so kann man die Gleichung sogar durch x^{p+1} dividiren, sodass ihr Grad nur noch $n - (p + 1)$ beträgt.

b) a_0 nicht $= 0$, aber alle andern Grössen, $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ gleich Null. Dann heisst die Normalform

$$x^n = a_0.$$

Eine Gleichung, welche ausser dem Gliede x^n nur noch ein von x freies Glied enthält, heisst eine reine Gleichung vom n^{ten} Grade, jede andere eine gemischte. Die Normalform der reinen Gleichung vom n^{ten} Grade kann noch weiter vereinfacht werden. Setzt man nämlich $a_0 = a^n$, dividirt die Gleichung durch a^n und setzt $\frac{x}{a} = \alpha$, so geht sie über in

$$\alpha^n = 1.$$

Anm. Nur die Gleichungen des 1., 2., 3. und 4. Grades sind in der allgemeinen Form algebraisch, d. h. mit Hilfe der 6 ersten Rechnungsarten, auflösbar, von höheren Gleichungen dagegen nur besondere Arten. — Eine Gleichung ist nicht lösbar, wenn ihre beiden Seiten sich widersprechen; sie hat unendlich viele Lösungen (ist eine Formel), wenn beide Seiten auf dieselbe Form gebracht werden können. Beispiele:

$$\frac{4x + 3}{8} + \frac{x + 1}{3} = \frac{18 + 20x}{24}; \quad \frac{4x + 3}{8} + \frac{x + 1}{3} = \frac{17 + 20x}{24}.$$

Wir lösen nun der Reihe nach die Gleichungen der ersten 4 Grade, und lassen dabei jedesmal die reine Gleichung der gemischten vorangehen.

1. Die Gleichung vom ersten Grade (lineare Gleichung).

95. Auflösung. — Da die Normalform dieser Gleichung $x = a_0$ ist, so fallen reine und gemischte Gleichung hier zusammen, und die Gleichung ist durch Reduction auf die Normalform bereits gelöst.

(Aufgaben: Hofmann 2. Sechster und siebenter Abschnitt. — Bardey XXI. XXIII.)

96. Erweiterung. — *Gleichungen mit mehreren Unbekannten.* — Ist eine Gleichung mit 2 oder mehreren Unbekannten gegeben, so kann man allen Unbekannten bis auf eine beliebige

Werthe geben, und jedesmal ist dann die letzte Unbekannte bestimmt. Die Gleichung hat also unzählig viele Lösungen.

Anm. Die hier gemachten Bemerkungen gelten für Gleichungen beliebig hoher Grade.

Sind zwei Gleichungen mit denselben beiden Unbekannten gegeben, so lässt sich zeigen, dass es für jede der Unbekannten einen Werth giebt, welcher beiden Gleichungen genügt. Denn bestimmt man die eine Unbekannte (y) aus der einen Gleichung, und setzt ihren Werth, welcher x enthält, in die andre ein, so enthält diese Gleichung nur noch die Unbekannte x . Mithin ist x durch diese Gleichung bestimmt, und folglich auch y durch die andre, wenn man den gefundenen Werth von x darin einsetzt. — Es existirt also in diesem Falle für das System der beiden Gleichungen nur eine Lösung. Dasselbe findet, wie leicht zu sehen, statt, wenn drei Gleichungen mit drei Unbekannten, u. s. w., im Allgemeinen, wenn n Gleichungen mit n Unbekannten gegeben sind.

Sind endlich zwei oder mehrere Gleichungen mit nur einer Unbekannten x gegeben, so genügt schon eine Gleichung zur Bestimmung dieser Unbekannten, und die übrigen Gleichungen sind entweder überflüssig, wenn nämlich der gefundene Werth von x auch aus ihnen hervorgeht, oder mit der ersten Gleichung unvereinbar, wenn sie andere Werthe ergeben. Im Allgemeinen also existirt in diesem Falle für das System der Gleichungen keine Lösung.

Auf einen der drei hier beschriebenen Fälle lässt sich jedes System von Gleichungen zurückführen. Denn bestimmt man eine Unbekannte aus einer Gleichung und setzt ihren Werth in die übrigen ein, so erhält man ein neues System, welches eine Gleichung und eine Unbekannte weniger enthält. Sind also

a) mehr Unbekannte als Gleichungen,
so bleibt nach wiederholter Anwendung dieses Verfahrens eine Gleichung mit mehreren Unbekannten übrig, und das System hat unzählig viele Lösungen, d. h. jede Unbekannte hat unzählig viele Werthe. — Sind

b) ebensoviele Unbekannte als Gleichungen,
so bleibt schliesslich eine Gleichung mit einer Unbekannten übrig, und das System hat eine Lösung, d. h. jede Unbekannte hat einen Werth. — Sind endlich

c) weniger Unbekannte als Gleichungen,
so bleiben schliesslich mehrere Gleichungen mit einer Unbe-

kannten übrig, und das System hat keine Lösung, d. h. es giebt für die Unbekannten keine Werthgruppe, welche allen Gleichungen genügt.

Anm. Im ersten Falle gehört zu jeder beliebig gewählten Werthgruppe der übrigen Unbekannten ein bestimmter Werth von x , der sich ändert, sobald eine der Unbekannten einen anderen Werth erhält. Der Werth von x ist also von denen der anderen Unbekannten abhängig, und man drückt dies aus, indem man sagt, x sei eine Funktion der übrigen Unbekannten. Natürlich ist auch jede der anderen Unbekannten eine Funktion der übrigen. — Die Zahl der Lösungen kann eingeschränkt werden, wenn die fehlenden Gleichungen durch Bedingungen ersetzt sind. Der einfachste Fall ist derjenige, wo eine Gleichung mit zwei Unbekannten und eine Bedingung (z. B. dass die Werthe der Unbekannten rationale oder ganze oder ganze positive Zahlen sein sollen) gegeben ist. Von solchen Gleichungen, welche diophantische heissen, wird weiter unten (Nr. 150) die Rede sein.

Der zweite Fall, welcher allein eine bestimmte Lösung giebt, wird uns hier ausschliesslich beschäftigen.

Im dritten Falle kann man den Werth der letzten Unbekannten noch aus einer Gleichung bestimmen, und in die übrigen einsetzen. Sind die bekannten Zahlen der Gleichungen dann in Buchstaben gegeben, so drücken diese letzten, keine Unbekannte mehr enthaltenden Gleichungen ebensoviele Bedingungen aus, welche diese Buchstaben erfüllen müssen, damit eine gemeinsame Lösung der Gleichungen existire. Diese Gleichungen heissen daher auch Bedingungsgleichungen.

Die Normalform einer Gleichung mit mehreren Unbekannten ist

$$ax + by + cz + \dots = m,$$

worin $x, y, \dots$ unbekannte, $a, b, \dots m$ bekannte Grössen (ganze Zahlen) sind. — Die Wegschaffung einer Unbekannten aus einer Reihe von Gleichungen heisst Elimination der Unbekannten.

97. Eliminationsmethoden.*) — Die Elimination einer Unbekannten aus mehreren Gleichungen kann durch verschiedene Methoden bewirkt werden.

1. Die Substitutionsmethode. — Man löst eine Gleichung nach der wegzuschaffenden Unbekannten auf, und setzt deren Werth in die anderen Gleichungen ein.

Anm. Diese Methode ist auch auf Gleichungen von höherem als erstem Grade anwendbar, soweit dieselben eine Lösung gestatten.

2. Die Comparationsmethode. — Man löst alle Gleichungen nach der wegzuschaffenden Unbekannten auf und setzt den einen Werth dieser Unbekannten der Reihe nach allen übrigen gleich.

*) Beispiele s. am Schluss des Buches in der „Uebersicht der Formeln und Regeln“.

3. Die Additionsmethode. — Man bringt alle Gleichungen auf die Normalform, multiplicirt die erste und die zweite Gleichung mit solchen Zahlen, dass die Coefficienten einer Unbekannten gleich, aber mit verschiedenen Vorzeichen versehen sind, und addirt dann beide Gleichungen. Auf dieselbe Weise eliminirt man dieselbe Unbekannte aus der 1. und 3., aus der 1. und 4. Gleichung, u. s. w.

Anm. Diese Methode ist nur auf Gleichungen 1. Grades (oder solche, die sich darauf zurückführen lassen) anwendbar, in diesem Falle aber die bequemste.

Durch wiederholte Anwendung dieser Methoden auf m Gleichungen mit m Unbekannten gelangt man schliesslich zu einer Gleichung mit einer Unbekannten. Es gestaltet sich die Auflösung nach der dritten Methode, wie folgt:

a) Bei zwei Gleichungen:

$$1) \ a_1 x + b_1 y = c_1$$

$$2) \ a_2 x + b_2 y = c_2.$$

Um y zu eliminiren, multiplicire man 1) mit b_2 , 2) mit $(-b_1)$.

$$1) \ a_1 b_2 x + b_1 b_2 y = c_1 b_2.$$

$$2) \ -a_2 b_1 x - b_1 b_2 y = -c_2 b_1.$$

Folglich durch Addition:

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) x = c_1 b_2 - c_2 b_1$$

oder:

$$3) \ x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Um y zu finden, hätte man x eliminiren, d. h. 1) mit a_2 , 2) mit $(-a_1)$ multipliciren müssen. Da die Gleichungen 1) und 2) ungeändert bleiben, wenn man x mit y , a_1 mit b_1 , a_2 mit b_2 vertauscht, so ist dasselbe mit jeder aus 1) und 2) abgeleiteten Gleichung der Fall, namentlich mit der Gleichung 3). Man erhält also aus 3) durch diese Vertauschungen:

$$y = \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{b_1 a_2 - b_2 a_1}.$$

Anm. Ist $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, so wird bei der Auflösung der Factor von x , ebenso wie der von y , gleich Null, also verschwinden x und y selbst (nach 69). Da alsdann $a_1 b_2 = a_2 b_1$ oder $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ ist, so kann man den gemeinsamen Werth dieser Quotienten e nennen, und erhält: $a_1 = a_2 e$; $b_1 = b_2 e$, oder, wenn man diese Werthe in 1) einsetzt: $(a_2 x + b_2 y) e = c_1$ oder $a_2 x + b_2 y = \frac{c_1}{e}$. Ist nun c_2 nicht $= \frac{c_1}{e}$, so widersprechen sich die beiden Gleichungen, da sie derselben Grösse $a_2 x + b_2 y$ verschiedene

Werthe beilegen. Ist aber $c_2 = \frac{c_1}{e}$, oder $\frac{c_1}{c_2} = e$, so geht die erste Gleichung aus der zweiten durch Multiplication aller Glieder mit e hervor; die erste Gleichung trägt also zur Bestimmung von x und y nichts Neues bei, die beiden Gleichungen sind von einander abhängig und haben für die Auflösung nur den Werth einer Gleichung. Hieraus geht für die Lösbarkeit zweier Gleichungen die Bedingung hervor, dass dieselben einander nicht widersprechen und von einander nicht abhängig sein dürfen.

b) Bei drei Gleichungen:

$$1) \ a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$

$$2) \ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$

$$3) \ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3.$$

Die Elimination von z giebt:

$$\text{aus 1) und 2): } 4) \ (a_1 c_2 - a_2 c_1) x + (b_1 c_2 - b_2 c_1) y = d_1 c_2 - d_2 c_1,$$

$$\text{aus 2) und 3): } 5) \ (a_2 c_3 - a_3 c_2) x + (b_2 c_3 - b_3 c_2) y = d_2 c_3 - d_3 c_2.$$

Da diese Gleichungen die Form der unter a) gegebenen haben, so braucht man in der dortigen Lösung für x nur statt a_1 , b_1 , ... die Coefficienten der neuen Gleichungen zu setzen, und erhält:

$$x = \frac{(d_1 c_2 - d_2 c_1)(b_2 c_3 - b_3 c_2) - (d_2 c_3 - d_3 c_2)(b_1 c_2 - b_2 c_1)}{(a_1 c_2 - a_2 c_1)(b_2 c_3 - b_3 c_2) - (a_2 c_3 - a_3 c_2)(b_1 c_2 - b_2 c_1)},$$

und durch dasselbe Verfahren, wie in a), ähnliche Ausdrücke für y und z . Löst man in dem Ausdruck für x die Klammern des Dividend, lässt zwei sich aufhebende Glieder weg, beachtet, dass der Divisor aus dem Dividend hervorgeht, indem man überall a statt d setzt, und dass die Glieder des Dividend und des Divisor denselben gemeinsamen Factor c_2 enthalten, so erhält man

$$6) \ x = \frac{(b_2 c_3 - b_3 c_2) d_1 + (b_3 c_1 - b_1 c_3) d_2 + (b_1 c_2 - b_2 c_1) d_3}{(b_2 c_3 - b_3 c_2) a_1 + (b_3 c_1 - b_1 c_3) a_2 + (b_1 c_2 - b_2 c_1) a_3}.$$

Aehnlich wie bei zwei Gleichungen findet man hieraus y , indem man für a, b, c der Reihe nach b, c, a setzt (a, b, c cirkulär vertauscht); und durch dasselbe Verfahren z aus y . Man bemerkt, dass bei allen diesen Vertauschungen der Divisor ungeändert bleibt.

4. Die Determinanten-Methode. — In den oben angegebenen Werthen der Unbekannten für 2 und 3 Gleichungen gestatten Dividend und Divisor eine abgekürzte Schreibweise, die den Vortheil hat, dass sie ohne weitere Rechnung aus den gegebenen Gleichungen gefunden und durch ein rein mecha-

nisches Verfahren in die oben gegebene Lösungsform verwandelt werden kann.

Man setzt nämlich für den Fall zweier Gleichungen:

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

nennt den rechts stehenden Ausdruck, welcher aus den linken Seiten der Gleichungen $a_1 x + b_1 y = c_1$, $a_2 x + b_2 y = c_2$ durch blosse Fortlassung der Unbekannten und Vorzeichen gebildet ist, die Determinante dieser Gleichungen, und bestimmt den Werth dieser Determinante (die aus 2 Horizontal- oder 2 Verticalreihen besteht, und deren Buchstaben Glieder heissen) durch folgendes Verfahren: Man multiplicirt das Anfangsglied der 1. Horizontalreihe, a_1 , mit der Zahl b_2 , welche übrig bleibt, wenn man die durch a_1 gehende Horizontal- und Verticalreihe austreicht. Dann multiplicirt man das Anfangsglied der 2. Horizontalreihe, a_2 , mit der Zahl b_1 , welche übrig bleibt, wenn man die durch a_2 gehende Horizontal- und Verticalreihe austreicht. Die beiden Producte werden dann addirt, nachdem das zweite das Zeichen — erhalten hat. Demnach kann man die Werthe der beiden Unbekannten bei zwei Gleichungen (unter Anwendung des Divisionszeichens :) schreiben

$$x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}; \quad y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Ebenso setzt man für den Fall dreier Gleichungen:

$$a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2(b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Die rechts stehende dreireihige Determinante lässt sich dann durch das vorhin beschriebene Verfahren durch drei zweireihige ausdrücken, welche abwechselnd die Zeichen + und — erhalten. Es ist nämlich nach obiger Regel:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix},$$

und die rechte Seite lässt sich dann leicht in den ursprünglichen Ausdruck verwandeln, wobei die Determinantenstriche in Klammern übergehen.

Anm. Die rechts stehenden zweireihigen Determinanten heissen die zu den Gliedern a_1 , a_2 , a_3 gehörigen Unterdeterminanten. Zu jedem Gliede einer Determinante kann man eine Unterdeterminante bil-

den, indem man die das Glied enthaltende Horizontal- und Verticalreihe ausstreicht. Das Vorzeichen einer solchen Unterdeterminante ist positiv oder negativ, je nachdem man, von dem zugehörigen Gliede aus nach links und dann nach oben fortschreitend, eine gerade oder ungerade Anzahl von Gliedern bis zum Anfangsgliede a_1 zu zählen hat. Man kann die gegebene Determinante in die Unterdeterminanten jeder drei in derselben Horizontal- oder Verticalreihe stehenden Glieder zerlegen. Diese Zerlegungen entsprechen den verschiedenen Arten, wie man aus den 6 Gliedern des durch die Determinante dargestellten Polynoms gemeinsame Factoren heraussetzen kann.

Hiernach ist

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 b_1 c_1 \\ d_2 b_2 c_2 \\ d_3 b_3 c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix}}; y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 d_1 c_1 \\ a_2 d_2 c_2 \\ a_3 d_3 c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix}}; z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 b_1 d_1 \\ a_2 b_2 d_2 \\ a_3 b_3 d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix}}.$$

Diese Betrachtungen lassen sich offenbar auf ein System von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten, die in der Normalform gegeben sind, ausdehnen.*) Man entnimmt der Form der für die Unbekannten gefundenen Lösungen die Regel:

111. Jede Unbekannte eines Systems von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten ist gleich einem Quotienten, dessen Divisor die Determinante des Systems ist, und dessen Dividend aus dem Divisor hervorgeht, wenn man darin die Coefficienten jener einen Unbekannten der Reihe nach durch die rechten Seiten der Gleichungen ersetzt.

Bezeichnet man also die Determinante des Systems mit Δ , und die durch Einsetzung der rechten Seiten für die $a, b, \dots$ aus derselben gebildeten Determinanten mit $\Delta_a, \Delta_b, \dots$, so ist allgemein

$$x = \frac{\Delta_a}{\Delta}; y = \frac{\Delta_b}{\Delta}; \dots \text{ oder } \Delta \cdot x = \Delta_a; \Delta \cdot y = \Delta_b; \dots$$

Anm. Ist $\Delta = 0$, so erhält man hiernach für $x, y \dots$ überhaupt keine bestimmten Werthe. Sind auch $\Delta_a, \Delta_b \dots$ gleich Null, so erhält man für alle Unbekannten den Werth $\frac{0}{0}$; d. h.: es sind nicht alle Gleichungen von einander unabhängig, und jede Unbekannte kann jeden beliebigen Werth annehmen. Andernfalls widersprechen sich einzelne Gleichungen, und die Aufgabe, Werthe für die Unbekannten zu finden, die

*) Es ist indess nicht zu übersehen, dass in diesem Verfahren ein strenger Beweis für die Richtigkeit der folgenden Regel nicht liegt. Man müsste vielmehr noch zeigen, dass dieselbe, unter der Voraussetzung, dass sie für n Gleichungen gilt, auch noch für $n + 1$ Gleichungen richtig ist. Da sie nun für 2 und 3 Gleichungen gilt, so gilt sie dann allgemein.

den Gleichungen genügen, ist überhaupt unlösbar. — Sind in dem System der gegebenen Gleichungen alle rechten Seiten gleich Null, so enthalten alle Glieder der Gleichungen je eine Unbekannte in der ersten Potenz. — Man nennt eine Gleichung homogen im n^{ten} Grade, wenn jedes ihrer Glieder ein Product von n Unbekannten $x, y, \dots u \dots$ enthält (worin auch mehrere oder alle Factoren gleich sein können). Dividirt man die ganze Gleichung durch u^n , und setzt $\frac{x}{u} = x_1, \frac{y}{u} = y_1, \dots$, so erhält man eine gewöhnliche Gleichung, die eine Unbekannte weniger enthält. Umgekehrt kann man eine gewöhnliche Gleichung homogen machen, wenn man $x_1 = \frac{x}{u}, y_1 = \frac{y}{u} \dots$ setzt, und dann die ganze Gleichung mit u^n multiplicirt. — Hiernach ist ein System von n Gleichungen 1. Grades, mit n Unbekannten, deren rechte Seiten (d) alle Null sind, homogen im 1. Grade, und lässt sich in ein System von n Gleichungen mit $n - 1$ Unbekannten verwandeln. Folglich muss, damit die Werthe der $n - 1$ Unbekannten allen n Gleichungen genügen, eine Bedingungsgleichung zwischen den Coefficienten erfüllt sein, und da die Determinanten $\Delta_a, \Delta_b, \dots$, welche in jedem Gliede einen Factor d enthalten, Null sind, so sieht man, dass die Determinante Δ auch gleich Null sein muss, wenn die Gleichungen sich nicht widersprechen sollen. Es ist also $\Delta = 0$ die erwähnte Bedingungsgleichung, und man kann sagen: Damit ein System 112. von n homogenen, auf Null gebrachten Gleichungen 1. Grades mit n Unbekannten eine Lösung habe, muss die Determinante des Systems verschwinden. — Diese Determinante ist auch als das Resultat der Elimination aller Unbekannten aus den n Gleichungen zu betrachten, und heisst in dieser Eigenschaft die Resultante des Systems.

(Aufgaben: Hofmann 2. Neunter Abschn. 3. Dreizehnter Abschn. — Bardey XXIV. XXV.)

2. Die Gleichung vom zweiten Grade (quadratische Gl.).

a) Die reine Gleichung $\alpha^2 = 1$.

98. *Auflösung.* — Indem man auf beiden Seiten mit 2 radicirt, erhält man nach 79:

$$\alpha = \sqrt[2]{1} = 1.$$

Bringt man aber die Gleichung auf die Form

$$\alpha^2 - 1 = 0,$$

so kann man nach 45 dafür schreiben:

$$(\alpha + 1)(\alpha - 1) = 0.$$

Diese Gleichung wird nach 69 befriedigt, wenn man $\alpha + 1$ oder $\alpha - 1$ gleich Null setzt. Sie kann aber auch nur durch eine dieser Annahmen befriedigt werden, da das Product zweier Zahlen, von denen keine gleich Null ist, nur eine von Null verschiedene Zahl sein kann. Die Gleichung $\alpha^2 = 1$ zerfällt also in die beiden Gleichungen

$$\alpha - 1 = 0, \quad \alpha + 1 = 0,$$

deren Lösungen wir durch α_1 und α_2 unterscheiden, sodass also

$$\alpha_1 = +1, \alpha_2 = -1$$

zwei Zahlen sind, welche beide der Gleichung $\alpha^2 = 1$ genügen.

Der Ausdruck $\sqrt[2]{1}$ ist hiernach zweideutig, da er sowohl $+1$ wie -1 vorstellen kann. Dasselbe ist mit $\sqrt[2]{a}$ der Fall, da $\sqrt[2]{a} = \sqrt[2]{1 \cdot a} = \sqrt[2]{1} \cdot \sqrt[2]{a}$ ist. Da aber die beiden Werthe nur durch das Vorzeichen sich unterscheiden, so kann man ihre Existenz durch die Bezeichnung $\pm \sqrt[2]{a}$ andeuten, wodurch darauf hingewiesen wird, dass man sowohl das obere wie das untere Zeichen wählen kann.

Die oben gegebenen Werthe α_1 und α_2 heissen die Quadratwurzeln der Einheit, und es bestehen zwischen ihnen offenbar die Formeln:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0; \alpha_1 \alpha_2 = -1.$$

Anm. Dass $\sqrt[2]{a}$ doppeldeutig ist, hängt damit zusammen, dass nach 76

$$(+b)^2 = (-b)^2 = +b^2$$

ist. Die Regel 51 darf daher auf gleiche Zahlen nur unter der Voraussetzung angewandt werden, dass, wenn mit 2 radicirt wird, auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens dieselbe Quadratwurzel der Einheit als Factor hinzugefügt wird. (Andernfalls könnte man aus $b^2 = b^2$ schliessen, dass $+b = -b$ sei.) Und auf Ausdrücke von der Form $(+b)^2 = (-b)^2$ nur unter der Voraussetzung, dass auf beiden Seiten verschiedene Quadratwurzeln der Einheit hinzugefügt werden. Tritt eine solche doppeldeutige Grösse wie $\sqrt[2]{a}$ bei der Umformung einer Gleichung auf, so haben die beiden für die Unbekannte sich daraus ergebenden Werthe gleiche Berechtigung. Tritt sie aber bei der Umformung einer Formel auf, deren Seiten nothwendig gleich sind, so kann nur einer ihrer beiden Werthe gelten, der andere führt nothwendig auf einen Widerspruch. Auf der Nichtbeachtung dieser, oder der in der Anm. zu 69 gegebenen Vorschrift beruhen alle scheinbaren Beweise für die Gleichheit von zwei wirklich ungleichen Zahlen.

(Aufgaben: Hofmann 3. Zwölfter Abschn. I. Vierzehnter Abschn. I.)

b) Die gemischte Gleichung $x^2 + ax = b$.

99. Auflösung.*) — Wäre die linke Seite dieser Gleichung die vollständige zweite Potenz einer Summe, so könnte man diese Summe als neue Unbekannte (y) betrachten, und statt

*) Beispiel s. am Schluss des Buches in der „Uebersicht der Formeln und Regeln“.

der gegebenen Gleichung hätte man eine rein quadratische Gleichung in y und eine lineare, in welcher x durch y bestimmt würde.

Vergleichen wir nun die linke Seite $x^2 + ax$ mit der Formel (44) $d^2 + 2db + b^2 = (d + b)^2$, so können wir setzen $d^2 = x^2$, also $d = x$; ferner $2db = ax$, also, da $d = x$ ist, $2b = a$, d. h.: $b = \frac{a}{2}$. Also ist, wenn man für d und b diese Werthe setzt:

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2.$$

Hieraus sieht man, dass der linken Seite der gegebenen Gleichung nur das Glied $+\frac{a^2}{4}$ fehlt, damit dieselbe eine vollständige zweite Potenz wird. Addirt man dieses Glied auf beiden Seiten, so bleibt die Gleichung ungeändert und lautet nun:

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = b + \frac{a^2}{4}$$

oder:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = b + \frac{a^2}{4}$$

oder:

$$x + \frac{a}{2} = \pm \sqrt{b + \frac{a^2}{4}}$$

oder:

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{b + \frac{a^2}{4}};$$

d. h.:

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{b + \frac{a^2}{4}}; \quad x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{b + \frac{a^2}{4}}.$$

Anm. Durch eine leichte Umformung kann die Lösung auch auf die Form

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$$

gebracht werden. — Es ist rathsam, jede zur Lösung vorgelegte gemischt-quadratische Gleichung den zur Lösung führenden Umformungen zu unterziehen, nicht aber die Werthe von a und b in die fertige Formel einzusetzen. — Die in der einleitenden Bemerkung vorgesehene Substitution von y für $x + \frac{a}{2}$ kann bei der Einfachheit der Gleichung unterbleiben.

Es ist aber wichtig, zu bemerken, dass die Lösung der Gleichung auf der Möglichkeit dieser Substitution beruht. — Man beachte noch beson-

ders die Fälle, wo a eine gerade Zahl, oder negativ, oder ein Quotient ist. Ist a ungerade, so kann man, um in der Lösung Quotienten zu vermeiden, die Gleichung mit 4 multipliciren und dann $2x = y$ setzen.

Andere, von der oben beschriebenen nicht wesentlich verschiedene, aber weniger einfache Methoden zur Lösung der Gleichung sind folgende:

1) Man setze $x = y + \lambda$, setze in der durch diese Einsetzung erhaltenen Gleichung in y den Coefficienten von y gleich Null, und bestimme λ aus dieser Gleichung. Man sieht, dass dieses Verfahren auch bei Gleichungen höheren Grades dazu dienen kann, jedes beliebige Glied der Gleichung (mit Ausnahme des ersten und letzten) zu entfernen. — Eine auf diese Art vereinfachte Gleichung heisst reducirt.

2) In der auf Null gebrachten Gleichung

$$x^2 + ax + c = 0$$

setze man $c = \lambda - \mu$, und bestimme λ so, dass $x^2 + ax + \lambda$ eine vollständige zweite Potenz wird. Durch dieses Verfahren wird ein Glied der Gleichung in zwei neue aufgelöst.

Anm. Auf die gemischt-quadratische Gleichung lassen sich alle Gleichungen von der Form

$$x^{2n} + ax^n = b$$

zurückführen, indem man $x^n = y$ setzt. Dabei kann n eine beliebige Zahl sein.

Ebenso die symmetrische Gleichung 4. Grades

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0,$$

die man schreibt:

$$(x^4 + 1) + a(x^3 + x) + bx^2 = 0,$$

dann durch x^2 dividirt:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = 0,$$

worauf man die erste Klammer durch Addition von 2 zum Quadrat von $\left(x + \frac{1}{x}\right)$ macht:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + a\left(x + \frac{1}{x}\right) + b - 2 = 0.$$

Indem man nun $x + \frac{1}{x} = y$ setzt, erhält man eine quadratische Gleichung.

Ebenso wird die symmetrische Gleichung 5. Grades behandelt, deren eine Wurzel offenbar -1 ist, die man also durch $(x + 1)$ dividiren kann.

Manche andere höhere Gleichungen können durch Umformungen oder Substitutionen, über die sich im Einzelnen keine Vorschriften geben lassen, in quadratische und reine Gleichungen zerlegt werden.

(Aufgaben: Hofmann 3. Zwölfter Abschn. II. Vierzehnter Abschn. II. — Bardey XXVI. XXVII.)

100. Zusammenhang zwischen den Wurzeln und den Coefficienten der Gleichung. — Wir bemerkten bei der rein quadratischen Gleichung, dass Summe und Product ihrer beiden Wurzeln besonders einfache Werthe hatten. Vereinigen wir auf dieselbe Weise die Wurzeln der auf Null gebrachten gemischt-quadratischen Gleichung

$$x^2 + ax + c = 0,$$

die wir aus den oben gefundenen Werthen von x_1 und x_2 erhalten, wenn wir darin b durch $-c$ ersetzen, nämlich:

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - c}; \quad x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - c},$$

so folgt:

$$1) \quad x_1 + x_2 = -a,$$

und durch Bildung des Productes (45)

$$2) \quad x_1 x_2 = \frac{a^2}{4} - \left(\frac{a^2}{4} - c \right) = c;$$

d. h.: In jeder geordneten, auf Null gebrachten, vollständigen quadratischen Gleichung ist die Summe der beiden Wurzeln gleich dem entgegengesetzt genommenen Coefficienten des zweiten Gliedes, und ihr Product gleich dem dritten Gliede. 113.

Anm. Betrachtet man in 1) und 2) x_1 und x_2 als einzelne Unbekannte, und eliminirt eine derselben durch Substitution, so erhält man die gemischt-quadratische Gleichung wieder.

Setzt man die aus 1) und 2) folgenden Werthe von a und c in die gegebene Gleichung ein, so folgt:

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0,$$

oder, indem man die Klammer löst und aus den Gliedern paarweise gemeinsame Factoren heraussetzt:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0;$$

d. h.: Jede quadratische Gleichung kann als Product von zwei linearen Gleichungen dargestellt werden. Hieraus ist auch zu ersehen, wie man eine Gleichung 2. Grades bilden kann, deren Wurzeln zwei gegebene Zahlen sind. 114.

Anm. Eine Gleichung ist rein quadratisch, wenn die Summe ihrer Wurzeln, d. h. a Null ist. Ist b gleich Null, so muss eine der Wurzeln Null sein. In diesem Falle kann man die gegebene Gleichung in der Form $x(x + a) = 0$ schreiben, aus welcher unmittelbar hervorgeht, dass die eine Wurzel 0, die andre $-a$ ist.

101. Erweiterung des Zahlbegriffes durch die Gleichungen 2. Grades. — Die Lösung einer Gleichung wurde oben als

eine der Bildung eines Polynoms entgegengesetzte Rechnungsart betrachtet. Es fragt sich nun, ob diese Lösung mit Hilfe der bisher bekannten Zahlen stets ausführbar ist, welches auch die in der Gleichung gegebenen Zahlen seien. Betrachten wir aber den in der Lösung der Gleichung $x^2 + ax + c = 0$ enthaltenen

Ausdruck $\sqrt{\frac{a^2}{4} - c}$, so sehen wir, dass dieser Ausdruck nur

dann eine Zahl im bisherigen Sinne vorstellt, wenn der Radicand eine positive Zahl oder Null ist. Denn da alle Potenzen einer positiven Zahl, und ebenso (nach 76) alle geraden Potenzen einer negativen Zahl positiv sind, so kann keine Zahl y der Gleichung $y^{2n} = -e$, also in unserem Falle der Gleichung

$y^2 = -e$ genügen; d. h. die Grösse $y = \sqrt{-e}$ macht, wenn sie als Zahl betrachtet werden soll, eine neue Erweiterung des Zahlbegriffes nothwendig. — Aber nur die quadratischen Gleichungen erfordern eine solche. Denn Gleichungen von ungeradem Grade führen auf eben solche Wurzeln, welche sowohl bei positiven als bei negativen Radicanden Zahlen der früheren Art sind (nach 76). Und Gleichungen von geradem Grade

führen auf eine $\sqrt[2n]{-e}$, die geschrieben werden kann $\sqrt[n]{\sqrt[2]{-e}}$, also auf eine Quadratwurzel der bezeichneten Art. — Da man endlich schreiben kann;

$$\sqrt[2]{-e} = \sqrt[2]{(-1)e} = \sqrt[2]{e} \cdot \sqrt[2]{-1},$$

so bleibt nur dieser letzte Factor: $\sqrt[2]{-1}$ als neu einzuführende Zahl übrig.

Die imaginäre Einheit.

102. Erklärung. — Die Quadratwurzel aus -1 wird imaginäre Einheit genannt und durch i bezeichnet.

$$i = \sqrt[2]{-1}; \quad i^2 = -1. *)$$

*) Diese Definition ist um so strenger festzuhalten, da sie bei oberflächlicher Betrachtung der Regel 55 zu widersprechen scheint. Durch Anwendung derselben würde man nämlich erhalten

$$i^2 = \sqrt[2]{-1} \cdot \sqrt[2]{-1} = \sqrt[2]{(-1)^2} = \sqrt[2]{1} = \pm 1.$$

Da nun $i^2 = \sqrt[2]{1}$ eine Formel und keine Gleichung ist, so kann nur einer der beiden Werthe von $\sqrt[2]{1}$ gelten (wie bereits in der Anm. auf S. 74

103. Eigenschaften der imaginären Einheit. — 1) Da die $\sqrt[2]{-1}$, wie jede Quadratwurzel, mit positivem oder negativem Vorzeichen genommen werden kann, so ist

$$+i = +\sqrt[2]{-1}; \quad -i = -\sqrt[2]{-1};$$

d. h.: die imaginäre Einheit ist entweder positiv oder negativ.

2) Durch Multiplication erhält man

$$(+i)(-i) = -i^2 = +1;$$

d. h.: Das Product aus dem positiven und dem negativen i ist Eins.

3) Hieraus folgt:

$$\frac{1}{+i} = -i; \quad \frac{1}{-i} = +i;$$

d. h.: Der umgekehrte Werth der imaginären Einheit ist ihrem entgegengesetzten Werthe gleich.

4) Durch fortgesetzte Multiplication der Formel $i^0 = 1$ mit i erhält man:

$$i^0 = i^4 = i^8 = \dots = i^{4n} = +1.$$

$$i^1 = i^5 = i^9 = \dots = i^{4n+1} = +i.$$

$$i^2 = i^6 = i^{10} = \dots = i^{4n+2} = -1.$$

$$i^3 = i^7 = i^{11} = \dots = i^{4n+3} = -i;$$

d. h.: Die ganzen Potenzen von i haben, von der nullten an, die periodisch sich wiederholenden Werthe $+1, +i, -1, -i$.

Anm. Ueber die Bedeutung der imaginären Einheit lässt sich nach der letzten Eigenschaft einstweilen nur sagen, dass die Multiplication einer Grösse mit i der Ausdruck für eine Veränderung ist, welche, viermal auf die Grösse angewendet, dieselbe in den ursprünglichen Zustand, dagegen, nur zweimal angewendet, in einen entgegengesetzten Zustand überführt. Die Natur dieser Veränderung tritt erst in den Anwendungen der Arithmetik auf die Raumlehre hervor.

Die imaginären und complexen Zahlen.

104. Erklärungen. — 1) Jede Zahl, die den Factor i bei sich hat, heisst imaginär. — Allgemeine Form: ai .

2) Im Gegensatze zu den imaginären Zahlen heissen alle übrigen Zahlen reell.

ausgeführt). Dies ist hier nach der Definition der imaginären Einheit der Werth -1 . Im Uebrigen wird mit i wie mit anderen Wurzeln gerechnet.

3) Eine Summe aus einer reellen und einer imaginären Zahl heisst *complexe Zahl*. — Allgemeine Form: $a + bi$.

4) Zwei complexe Zahlen, die sich nur durch das Vorzeichen von i unterscheiden, heissen *conjugirt*. — Allgemeine Form: $a + bi$ und $a - bi$.

Anm. Die beiden Wurzeln der gemischt-quadratischen Gleichung sind imaginär, wenn $\frac{a^2}{4} < c$, oder, falls wir $-a = 2a_1$ setzen, wenn $a_1^2 < c$.

Sei demnach $c = a_1^2 + b_1^2$, so lautet die Gleichung: $x^2 - 2a_1x + (a_1^2 + b_1^2) = 0$. Daraus folgt: $x_1 = a_1 + b_1i$; $x_2 = a_1 - b_1i$. Die beiden imaginären Wurzeln einer gemischt-quadratischen Gleichung sind also conjugirte Zahlen.

119. **105.** Beziehungen zwischen zwei conjugirten Zahlen. — Sei

$$a + bi = x, \quad a - bi = y,$$

so ist

$$1) \quad x + y = 2a; \quad a = \frac{x + y}{2}.$$

$$2) \quad x - y = 2bi; \quad b = \frac{x - y}{2i}.$$

$$3) \quad xy = a^2 + b^2;$$

$$4) \quad x^2 = a^2 - b^2 + 2abi; \quad a^2 - b^2 = \frac{x^2 + y^2}{2};$$

$$5) \quad y^2 = a^2 - b^2 - 2abi; \quad ab = \frac{x^2 - y^2}{4i}.$$

120. **106.** Rechnungen mit zwei complexen Zahlen. —

$$1) \quad (a + bi) + (a_1 + b_1i) = (a + a_1) + (b + b_1)i.$$

$$2) \quad (a + bi) - (a_1 + b_1i) = (a - a_1) + (b - b_1)i.$$

$$2) \quad (a + bi)(a_1 + b_1i) = (aa_1 - bb_1) + (ab_1 + ba_1)i.*$$

$$4) \quad \frac{a + bi}{a_1 + b_1i} = \frac{(a + bi)(a_1 - b_1i)}{a_1^2 + b_1^2} = \left(\frac{aa_1 + bb_1}{a_1^2 + b_1^2} \right) + \left(\frac{ba_1 - ab_1}{a_1^2 + b_1^2} \right)i;$$

d. h.: Summe, Differenz, Product und Quotient von zwei complexen Zahlen sind wieder complexe Zahlen.

Anm. Potenzirung und Radicirung einer complexen Zahl mit einer reellen führen ebenfalls auf eine complexe Zahl, dieselben Rechnungen jedoch, zwischen 2 complexen Zahlen ausgeführt, auf Resultate, welche die Potenzen a^i und i^i enthalten, deren Behandlung einem späteren Abschnitte vorbehalten bleibt.

(Aufgaben: Hofmann 2. Vierter Abschn. IX. — Bardey XVII.)

*) Das Product ist reell, wenn $ab_1 + ba_1 = 0$, d. h. $\frac{a}{b} = -\frac{a_1}{b_1}$. Spezieller Fall: Für $a = a_1$, $b = -b_1$ ist $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$. — Zerlegung einer reellen Zahl in zwei imaginäre Factoren.

107. Erweiterung. — *Gleichungen mit mehreren Unbekannten.*

— Ist eine der gegebenen Gleichungen vom 1. Grade, so kann man eine Unbekannte daraus bestimmen, und ihren Werth in die übrigen Gleichungen einsetzen, deren Grad hierdurch nicht erhöht wird. — Sind zwei quadratische Gleichungen gegeben (d. h. Gleichungen, welche die Normalform $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = f$ haben) so führt dieses Verfahren auf eine Gleichung 4. Grades. In vielen Fällen aber lässt sich die Bestimmung der Unbekannten durch Lösung quadratischer Gleichungen bewirken, und zwar ohne dass man nöthig hat, die Gleichungen auf die Normalform zu bringen. Selbst Gleichungen höherer Grade sind auf diesem Wege lösbar. Die wichtigsten Fälle sind folgende:

1) Gleichungen, welche die Unbekannten nur in den Verbindungen xy und $x^2 + y^2$ oder überhaupt in nur 2 Verbindungen enthalten. — Man setzt $x^2 + y^2 = u$, $xy = v$, bestimmt u und v , und bildet $(x \pm y)^2 = u \pm 2v$, wodurch man $x + y$ und $x - y$ erhält.

Anm. Löst man die Gleichungen $x^2 + y^2 = 2a$; $xy = b$ nach der unter 1) gegebenen Methode auf, so erhält man:

$$x = \sqrt{\frac{a+b}{2}} + \sqrt{\frac{a-b}{2}}; \quad y = \sqrt{\frac{a+b}{2}} - \sqrt{\frac{a-b}{2}}.$$

Substituirt man dagegen den aus der zweiten Gleichung genommenen Werth $y = \frac{b}{x}$ in die erste, so folgt:

$$x = \sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}}; \quad y = \sqrt{a - \sqrt{a^2 - b^2}}.$$

Durch Vergleichung dieser Resultate folgt:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{a^2 - b^2}} = \sqrt{\frac{a+b}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-b}{2}}. \quad 120a.$$

Demnach kann man Doppelwurzeln, die von der Form $\sqrt{a \pm \sqrt{a^2 - b^2}}$ sind, als Summen oder Differenzen einfacher Wurzeln darstellen. — (Aufgaben: Hofmann 2. Vierter Abschn. VIII. 15–60.)

2) Durch Addition oder Subtraction der gegebenen Gleichungen, durch Addition oder Subtraction von Gliedern, welche an einem vollständigen Quadrate fehlen, sucht man zwei der Verbindungen $(x \pm y)^2$, $x^2 + y^2$, xy , einzuführen und die Gleichungen dadurch auf die Form 1) zu bringen. Ebenso, indem man die Gleichungen durch einander, oder durch Verbindungen der Unbekannten dividirt. Für diese Zwecke sind die Formeln wichtig: (45a), ferner

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y); \quad x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy.$$

$$(x \pm y)^3 = (x^3 \pm y^3) \pm 3xy(x \pm y); \quad (x \pm y)^4 = (x^4 + y^4) \pm 4xy(x^2 + y^2) \pm 6x^2y^2.$$

Speciell empfiehlt sich für 2 Gleichungen von der Form $x^n + y^n = a$, $x + y = 2b$ die Substitution $x = b + z$, $y = b - z$, wodurch man eine Gleichung in z erhält, die, wenn $n < 6$ ist, auf eine quadratische, wenn $n < 8$, auf eine Gleichung vom 3., wenn $n < 10$, auf eine solche vom 4. Grade reducirbar ist.

3) Homogene Gleichungen. — Wenn die auf derselben Seite der beiden Gleichungen stehenden Glieder von gleichem Grade in den Unbekannten sind (also die linken Seiten von gleichem Grade sind, und ebenso die rechten), so setzt man $y = xz$, und dividirt die Gleichungen durch einander, wodurch man eine Gleichung in z erhält.

(Aufgaben: Hofmann 3. Zwölfter Abschn. III. Dreizehnter Abschn. III. — Bardey XXVIII. XXIX. XXX.)

3. Die Gleichung vom dritten Grade (cubische Gl.).

a) Die reine Gleichung $\alpha^3 = 1$.

108. *Auflösung.* — Radicirt man auf beiden Seiten mit 3, so erhält man nach 79:

$$\alpha = \sqrt[3]{1} = 1.$$

Bringt man aber die Gleichung auf die Form

$$\alpha^3 - 1 = 0,$$

so kann man (nach 45a, oder auch, indem man durch $\alpha - 1$ dividirt) dafür schreiben:

$$(\alpha^2 + \alpha + 1)(\alpha - 1) = 0.$$

Demnach zerfällt die Gleichung $\alpha^3 = 1$ in die beiden Gleichungen:

$$\alpha - 1 = 0; \quad \alpha^2 + \alpha + 1 = 0.$$

Bezeichnen wir die Wurzel der ersten durch α_1 , die Wurzeln der zweiten durch α_2 und α_3 , so erhalten wir, nachdem die zweite Gleichung aufgelöst ist, die Werthe:

$$\alpha_1 = +1, \quad \alpha_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}; \quad \alpha_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2},$$

von denen jeder, statt α gesetzt, der Gleichung $\alpha^3 = 1$ genügt.

Der Ausdruck $\sqrt[3]{1}$ ist hiernach dreideutig, und ebenso hat $\sqrt[3]{a}$ stets drei verschiedene Werthe, von denen der eine

reell ist, während die beiden andern imaginär sind. Man kann diese drei Werthe nur durch Vorsetzung der unterscheidenden Factoren α_1 (welcher wegbleiben kann), α_2 und α_3 kenntlich machen. Dieselben sind also:

$$\sqrt[3]{a}, \alpha_2 \sqrt[3]{a}, \alpha_3 \sqrt[3]{a},$$

worin α_2 und α_3 die oben angegebene Bedeutung haben.

Die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ heissen die Cubikwurzeln der Einheit, und es bestehen zwischen ihnen die leicht abzuleitenden Formeln:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0; & \alpha_2^2 &= \alpha_3 \\ \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1 &= 0; & \alpha_3^2 &= \alpha_2 \\ \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 &= +1; & \alpha_2 \alpha_3 &= +1. \end{aligned}$$

b) Die gemischte Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

109. Herstellung der reducirten Form. — Wir benutzen die (schon im vorigen Abschnitt, Nr. 99, 1) erwähnte) Substitution $x = y + \lambda$, um das zweite Glied der Gleichung zu entfernen. Diese Substitution giebt:

$$(y + \lambda)^3 + a(y + \lambda)^2 + b(y + \lambda) + c = 0,$$

oder:

$$\begin{array}{r|l} y^3 + 3\lambda y^2 + 3\lambda^2 y + \lambda^3 & \\ + ay^2 + 2a\lambda y + a\lambda^2 & \\ + by + b\lambda & \\ + c & = 0. \end{array}$$

Damit die Glieder, welche y^2 enthalten, verschwinden, muss offenbar

$$3\lambda + a = 0, \quad \lambda = -\frac{a}{3}$$

sein. Man hat also, um die reducirte Form herzustellen, nur

$$x = y - \frac{a}{3}$$

zu setzen.

Anm. Enthält a nicht den Factor 3, so kann man, um Quotienten zu vermeiden, die ganze Gleichung mit 27 multipliciren, und dann $3x = z$ setzen.

Die reducirte Form lautet dann, wenn man die Coefficienten der Potenzen von y wieder durch einzelne Buchstaben bezeichnet:

$$y^3 + py = q.$$

Zur Vereinfachung der Rechnung nehmen wir an, p sei durch 3 und q durch 2 theilbar. Andernfalls kann man den Coefficienten p oder q diese Eigenschaften dadurch geben, dass man die Gleichung mit 3^3 oder 2^3 oder 6^3 multiplicirt, und $3x$ oder $2x$ oder $6x$ gleich z setzt. In jedem Falle also kann die Gleichung auf die Form gebracht werden:

$$y^3 + 3py = 2q.$$

110. Auflösung.*) — Man setzt, ähnlich wie vorher,

$$1) \quad y = u + v$$

und erhält:

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + 3p(u + v) = 2q,$$

oder, indem man $3(u + v)$ als gemeinsamen Factor heraussetzt:

$$u^3 + v^3 + 3(u + v)(uv + p) = 2q.$$

Bestimmt man nun v durch die Bedingung

$$2) \quad uv + p = 0, \text{ oder } v = -\frac{p}{u},$$

so geht die Gleichung über in

$$u^3 + v^3 = 2q.$$

Aus 2) folgt ferner

$$u^3 v^3 = -p^3.$$

Setzt man endlich

$$3) \quad u^3 = u_1, \quad v^3 = v_1,$$

so lauten die beiden letzten Gleichungen:

$$u_1 + v_1 = 2q; \quad u_1 v_1 = -p^3.$$

Wenn man nun die erste dieser Gleichungen mit 2 potenzirt, die zweite mit 4 multiplicirt und von der ersten subtrahirt, so bleibt:

$$u_1^2 - 2u_1 v_1 + v_1^2 = 4q^2 + 4p^3$$

oder:

$$(u_1 - v_1)^2 = 4(q^2 + p^3);$$

$$u_1 - v_1 = 2\sqrt{q^2 + p^3}.$$

*) Unter den verschiedenen zur Lösung führenden Methoden ist hier die kürzeste und übersichtlichste (von Hudde), ihrer practischen Brauchbarkeit wegen, gewählt, obwohl sie den zur Lösung der quadratischen Gleichung angeführten Methoden nicht analog ist, und ihre Brauchbarkeit als glücklicher Zufall erscheint. Der den Lösungen der Gleichungen 2., 3. und 4. Grades gemeinsam zu Grunde liegende Gedanke wird, weil seine directe Verwendung zur Lösung viel zu umständlich ist, erst später Erwähnung finden. — Beispiel s. am Schluss des Buches in der „Uebersicht der Formeln und Regeln“.

Diese Gleichung giebt in Verbindung mit $u_1 + v_1 = 2q$ die Werthe:

$$u_1 = q + \sqrt{q^2 + p^3}; \quad v_1 = q - \sqrt{q^2 + p^3}.$$

Dann folgt aus 3)

$$u = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 + p^3}}; \quad v = \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 + p^3}},$$

und aus 1)

$$y = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 + p^3}}.$$

Anm. Diese Formel, welche zunächst eine Wurzel der Gleichung finden lehrt, heisst die cardanische.*)

Um alle Wurzeln der Gleichung zu finden, ist zu beachten, dass $u = \sqrt[3]{u_1}$ und $v = \sqrt[3]{v_1}$ je drei Werthe haben, so dass, wenn man diese Werthe beliebig zusammenstellen dürfte,

$$y = \sqrt[3]{u_1} + \sqrt[3]{v_1}$$

im Ganzen neun Werthe haben würde. Aber aus 2) $v = -\frac{p}{u}$ folgt, dass zu jedem Werthe von u nur ein einziger bestimmter Werth von v gehört. Nun sind die drei Werthe von u :

$$\alpha_1 u, \alpha_2 u, \alpha_3 u,$$

mithin die entsprechenden von v :

$$-\frac{p}{\alpha_1 u}, -\frac{p}{\alpha_2 u}, -\frac{p}{\alpha_3 u},$$

oder, da $\alpha_1 = 1$, $\frac{1}{\alpha_2} = \alpha_3$, $\frac{1}{\alpha_3} = \alpha_2$ ist:

$$-\frac{\alpha_1 p}{u}, -\frac{\alpha_3 p}{u}, -\frac{\alpha_2 p}{u},$$

d. h., wenn man $-\frac{p}{u}$ durch v ersetzt:

$$\alpha_1 v, \alpha_3 v, \alpha_2 v.$$

Demnach hat y die drei Wurzeln:

$$y_1 = u + v; \quad y_2 = \alpha_2 u + \alpha_3 v; \quad y_3 = \alpha_3 u + \alpha_2 v.$$

111. Untersuchung der Wurzeln. — Die Reellität der drei Wurzeln hängt ab von dem in den Werthen von u und v vor-

*) Cardanus, italienischer Mathematiker (1501—75), veröffentlichte die von seinem Freunde Tartaglia gefundene, ihm als Geheimniss anvertraute Formel.

kommenden Radicanden $q^2 + p^3$. Hier sind drei Fälle zu unterscheiden.

1) $q^2 + p^3 > 0$. Dann sind u und v reell, und von einander verschieden, folglich y_1 reell, aber y_2 und y_3 imaginär wegen der darin enthaltenen Factoren α_2 und α_3 , deren imaginäre Theile sich nicht wegheben.

2) $q^2 + p^3 = 0$. Dann sind u und v reell und einander gleich, folglich y_1 reell, y_2 und y_3 reell und einander gleich, weil beide gleich $u(\alpha_2 + \alpha_3)$, und $\alpha_2 + \alpha_3 = -1$, also reell ist.

3) $q^2 + p^3 < 0$. Dann sind u und v imaginär, nämlich, wenn wir $q^2 + p^3 = -r^2$ setzen:

$$u = \sqrt[3]{q + ri}; \quad v = \sqrt[3]{q - ri}.$$

Da nun durch Radicirung einer complexen Zahl mit einer reellen wieder eine complexe entsteht, und die beiden Werthe von u und v sich nur durch das Vorzeichen von i unterscheiden, so kann man setzen:

$$u = q_1 + r_1 i; \quad v = q_1 - r_1 i. \quad *)$$

Mithin ist in diesem Falle

$$y_1 = 2q_1; \quad y_2 = q_1(\alpha_2 + \alpha_3) + r_1 i(\alpha_2 - \alpha_3); \quad y_3 = q_1(\alpha_3 + \alpha_2) + r_1 i(\alpha_3 - \alpha_2)$$

oder, da $\alpha_2 - \alpha_3 = i\sqrt{3}$ ist:

$$y_2 = -q_1 - r_1 \sqrt{3}; \quad y_3 = -q_1 + r_1 \sqrt{3}.$$

Es sind also alle drei Wurzeln reell, obwohl sie alle in imaginärer Form erscheinen.

Anm. Da kein Verfahren bekannt ist, die Werthe von q_1 und r_1 aus q und r algebraisch zu bestimmen, oder, anders gesagt, die imaginären Formen der drei Wurzeln durch algebraische Rechnung in die reellen zu verwandeln, so heisst dieser dritte Fall der irreductible. — Wie die Bestimmung der Wurzeln in reeller Form mittelst transcender Ausdrücke ausgeführt werden kann, wird später gezeigt werden. — Auch rationale Wurzeln erscheinen oft in irrationaler Form. Man berechnet alsdann die Irrational-Zahlen als Decimalbrüche (nach Nr. 167).

(Aufgaben: Bardey XXXVIII.)

112. Zusammenhang zwischen den Wurzeln und den Coefficienten der Gleichung. — Sind x_1, x_2, x_3 die Wurzeln der vollständigen cubischen Gleichung, so ist

$$x - x_1 = 0, \quad x - x_2 = 0, \quad x - x_3 = 0,$$

*) Man bestimme aus diesen und den vorigen Formeln u^3 und v^3 , setze die beiden Werthe jeder dieser Grössen gleich, und stelle durch Gleichsetzung der reellen und der imaginären Theile die Beziehungen zwischen q, r, q_1, r_1 fest.

oder, durch Multiplication dieser Gleichungen:

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0.$$

Da diese Gleichung ebenso wie die gegebene cubische Gleichung durch jeden der drei Werthe x_1, x_2, x_3 , wenn man ihn für x setzt, befriedigt wird, so müssen beide Gleichungen Glied für Glied mit einander übereinstimmen. Löst man also in der letzten Gleichung die Klammern, sodass sie übergeht in:

$x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - x_1x_2x_3 = 0$,
und vergleicht damit die allgemeine cubische Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

so folgt:

- 1) $x_1 + x_2 + x_3 = -a$;
- 2) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = b$;
- 3) $x_1x_2x_3 = -c$;

d. h.: In jeder geordneten und auf Null gebrachten 121. vollständigen cubischen Gleichung ist die Summe der drei Wurzeln gleich dem entgegengesetzt genommenen Coefficienten des zweiten, die Summe der Producte je zweier gleich dem des dritten Gliedes, und das Product der drei Wurzeln gleich dem entgegengesetzt genommenen vierten Gliede.

Anm. Dieses Resultat lässt sich bestätigen, indem man für x_1, x_2, x_3 die oben gefundenen Werthe setzt. Für die reducirte Gleichung ist $a = 0, b = 3p, c = -2q$. — Der grösseren Einfachheit wegen ist zur Ableitung dieses Satzes hier der entgegengesetzte Weg gewählt, wie an entsprechender Stelle bei den quadratischen Gleichungen. Aehnliche Bemerkungen wie dort lassen sich auch hier über die Bildung einer Gleichung aus gegebenen Wurzeln machen, sowie über die Bedingungen der reinen cubischen Gleichung. — Ist eine Wurzel x_1 bekannt, so findet man die anderen am einfachsten, indem man die linke Seite der auf Null gebrachten cubischen Gleichung durch $x - x_1$ dividirt, und den Quotienten wieder gleich Null setzt. — Auf eine cubische Gleichung lässt sich unter andern zurückführen jede Gleichung von der Form $x^{3n} + ax^{2n} + bx^n + c = 0$, ferner die symmetrischen Gleichungen 6. und 7. Grades, wobei nur zu beachten, dass $x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$ ist. Vgl. die Anm. zu Nr. 99 am Ende.

4. Die Gleichung vom vierten Grade (biquadratische Gl.).

a) Die reine Gleichung $\alpha^4 = 1$.

113. *Auflösung.* — Radicirt man auf beiden Seiten mit 4, so erhält man nach 79:

$$\alpha = \sqrt[4]{1} = 1.$$

Bringt man aber die Gleichung auf die Form

$$\alpha^4 - 1 = 0,$$

so kann man dafür schreiben:

$$(\alpha^2 - 1)(\alpha^2 + 1) = 0.$$

Demnach zerfällt die Gleichung $\alpha^4 = 1$ in die beiden Gleichungen

$$\alpha^2 - 1 = 0; \alpha^2 + 1 = 0.$$

Bezeichnet man die Wurzeln der ersten Gleichung mit α_1 und α_2 , die der zweiten mit α_3 und α_4 , so findet sich:

$$\alpha_1 = +1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = +i, \alpha_4 = -i.$$

Demnach hat der Ausdruck $\sqrt[4]{1}$, und ebenso der allgemeinere: $\sqrt[4]{a}$ vier verschiedene Werthe, von denen zwei reell, die andern beiden imaginär sind. Man kann demnach die vier

Werthe von $\sqrt[4]{a}$ durch die Bezeichnungen unterscheiden:

$$+\sqrt[4]{a}, -\sqrt[4]{a}, +i\sqrt[4]{a}, -i\sqrt[4]{a}.$$

Die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ heissen die vierten Wurzeln (Biquadratwurzeln) der Einheit, und es bestehen zwischen ihnen die Formeln:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0;$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_3\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 = 0;$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4\alpha_1 + \alpha_4\alpha_1\alpha_2 = 0;$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = -1.$$

b) Die gemischte Gleichung $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

114. Herstellung der reducirten Form. — Setzt man ebenso wie bei der cubischen Gleichung $x = y + \lambda$, so ist $4\lambda + a$ der Coefficient von y^3 ; dieses Glied verschwindet also, wenn

$$4\lambda + a = 0, \lambda = -\frac{a}{4}$$

ist. Man hat also, um die reducirte Form herzustellen, nur

$$x = y - \frac{a}{4}$$

zu setzen.

Anm. Enthält a nicht den Factor 4, so kann man, um Quotienten zu vermeiden, die ganze Gleichung mit 4⁴ multipliciren, und dann $4x = z$ setzen.

Die reducirte Form lautet dann, wenn man die Coefficienten der Potenzen von y wieder durch einfache Buchstaben bezeichnet:

$$y^4 + py^2 + qy = r.$$

115. Auflösung.*) — Man setzt

$$1) \quad p = u - v$$

und bestimmt u und v so, dass die Gleichung die Form der gemischt-quadratischen annimmt. Durch die Substitution 1) geht die gegebene Gleichung über in

$$y^4 + uy^2 = vy^2 - qy + r$$

oder

$$\left(y^2 + \frac{u}{2}\right)^2 = vy^2 - qy + \left(r + \frac{u^2}{4}\right).$$

Jetzt also sind u und v so zu bestimmen, dass die rechte Seite dieser Gleichung die vollständige zweite Potenz einer Differenz $\mu y - v$ wird, also die Form annimmt

$$\mu^2 y^2 - 2\mu v y + v^2.$$

Demnach muss sein:

$$\mu^2 = v, \quad 2\mu v = q, \quad v^2 = r + \frac{u^2}{4},$$

oder, wenn man das vierfache Product von μ^2 und v^2 dem Quadrat von $2\mu v$ gleich setzt:

$$4v\left(r + \frac{u^2}{4}\right) = q^2,$$

oder, wenn man aus 1) $v = u - p$ einsetzt:

$$4(u - p)\left(r + \frac{u^2}{4}\right) = q^2,$$

oder endlich durch Lösung der Klammern:

$$2) \quad u^3 - pu^2 + 4ru = q^2 + 4pr.$$

Nachdem nun u aus der Gleichung 2) und v aus 1) gefunden ist, kann die Hauptgleichung geschrieben werden:

$$y^2 + \frac{u}{2} = \pm (\mu y - v) = \pm \left[\sqrt{u-p} \cdot y - \sqrt{r + \frac{u^2}{4}} \right]$$

oder:

$$y^2 - \sqrt{u-p} \cdot y = \mp \sqrt{r + \frac{u^2}{4}} - \frac{u}{2}.$$

*) Auch hier, wie bei den cubischen Gleichungen, ist die kürzeste Methode (von Ferrari, Schüler des Cardanus, 1522—65) gewählt, die gewöhnlich auf die allgemeine Gleichung 4. Grades angewendet wird, aber bei Benutzung der reducirten Form sich noch weiter vereinfacht. — Beispiel s. am Schluss des Buches in der „Uebersicht der Formeln und Regeln“.

Diese Gleichung theilt sich in die beiden folgenden:

$$3) \begin{cases} y^2 + \sqrt{u-p} \cdot y = + \sqrt{r + \frac{u^2}{4} - \frac{u}{2}}; \\ y^2 - \sqrt{u-p} \cdot y = - \sqrt{r + \frac{u^2}{4} - \frac{u}{2}}, \end{cases}$$

welche zusammen vier Werthe für y geben. — Hiernach hat die Gleichung vierten Grades vier Wurzeln.

Anm. Da die Gleichung 2) drei Wurzeln (u_1, u_2, u_3) hat, die alle in 3) eingesetzt werden können, so erhält man aus 3) im Ganzen 6 quadratische Gleichungen, und es könnte scheinen, als hätte die vorgelegte Gleichung 12 Wurzeln. Bezeichnet man aber die aus u_1 sich ergebenden 4 Wurzeln von 3) mit y_1, y_2, y_3, y_4 , so ist nach 113:

$$y_1 y_2 = \frac{u_1}{2} - \sqrt{r + \frac{u_1^2}{4}}; \quad y_3 y_4 = \frac{u_1}{2} + \sqrt{r + \frac{u_1^2}{4}};$$

mithin

$$u_1 = y_1 y_2 + y_3 y_4.$$

Diese Gleichung drückt den Zusammenhang aus zwischen den Werthen von y und denen von u . Andre Werthe von u , die von u_1 verschieden sind, werden sich ergeben, wenn man die Werthe der y in dem Ausdruck $y_1 y_2 + y_3 y_4$ anders ordnet. Dies ist aber nur noch auf zweifache Weise möglich (nämlich $y_2 y_3 + y_1 y_4$ und $y_3 y_1 + y_2 y_4$). Folglich ist

$$u_2 = y_2 y_3 + y_1 y_4; \quad u_3 = y_3 y_1 + y_2 y_4.$$

Setzt man also u_2 oder u_3 statt u_1 in die Gleichungen 3) ein, so erhält man dieselben 4 Werthe von y wie vorher, nur in anderer Zusammenstellung.

(Aufgaben: Bardey XXXIX.)

116. Untersuchung der Wurzeln. — Da die cubische Gleichung 2) jedenfalls wenigstens eine reelle Wurzel hat, so kann man diese in 3) einsetzen, und sieht dann, dass die Gleichung vierten Grades entweder vier reelle, oder zwei reelle und zwei imaginäre, oder vier imaginäre Wurzeln hat, je nachdem von den Gleichungen 3) jede, oder eine, oder keine ein Paar reeller Wurzeln hat.

117. Zusammenhang zwischen den Wurzeln und den Coefficienten der Gleichung. — Sind x_1, x_2, x_3, x_4 die Wurzeln der vollständigen biquadratischen Gleichung, so ist

$$x - x_1 = 0, \quad x - x_2 = 0, \quad x - x_3 = 0, \quad x - x_4 = 0,$$

oder:

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = 0.$$

Diese Gleichung muss nach Lösung der Klammern mit der gegebenen Gleichung für x übereinstimmen, da beide durch dieselben Werthe von x befriedigt werden. Man erhält also,

ähnlich wie bei der cubischen Gleichung, durch Gleichsetzung der Coefficienten:

- 1) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a,$
- 2) $x_1x_2 + x_3x_4 + x_2x_3 + x_1x_4 + x_3x_1 + x_2x_4 = b,^*)$
- 3) $x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_1 + x_4x_1x_2 = -c,$
- 4) $x_1x_2x_3x_4 = d.$

122.

Hiernach besteht zwischen den Wurzeln und den Coefficienten der biquadratischen Gleichung ein ähnlicher Zusammenhang, wie er bei den früheren Gleichungen hervortrat.

118. Gemeinsame Methode zur Lösung der Gleichungen 2., 3. und 4. Grades. — Man bildet eine zweite Gleichung von demselben Grade, und stellt zwischen den beiderseitigen Wurzeln Beziehungen auf, welche willkürliche Grössen enthalten. Diese Grössen bestimmt man alsdann so, dass die Hilfsgleichung durch Wegfall von Gliedern eine einfachere Form annimmt.

1) *Die quadratische Gleichung*

$$x^2 + ax = b.$$

Wir stellen die Hilfsgleichung auf

$$y^2 - (y_1 + y_2)y = -y_1y_2,$$

und die Bedingungsgleichung

$$y_1 + y_2 = 0,$$

und setzen

$$1) \quad y_1 = \frac{x_1 - \alpha}{x_1 - \beta}; \quad y_2 = \frac{x_2 - \alpha}{x_2 - \beta}.$$

Dann lautet die Bedingungsgleichung für α und β :

$$\frac{x_1 - \alpha}{x_1 - \beta} + \frac{x_2 - \alpha}{x_2 - \beta} = 0$$

oder:

$$(x_1 - \alpha)(x_2 - \beta) + (x_1 - \beta)(x_2 - \alpha) = 0$$

oder:

$$2x_1x_2 - \alpha(x_1 + x_2) - \beta(x_1 + x_2) + 2\alpha\beta = 0,$$

oder, da $x_1 + x_2 = -a$, $x_1x_2 = -b$ ist:

$$2) \quad -2b + (\alpha + \beta)a + 2\alpha\beta = 0.$$

Hierin kann man einer der beiden Grössen α und β einen beliebigen Werth geben, und die andere aus der Gleichung bestimmen. Die Hilfsgleichung aber geht über in

$$y^2 = -y_1y_2,$$

*) Wie hätte man diese Formel durch Betrachtung der Werthe von u_1, u_2, u_3 finden können?

oder wenn wir die Werthe 1) einsetzen:

$$y^2 = - \frac{(x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha)}{(x_1 - \beta)(x_2 - \beta)} = - \frac{x_1 x_2 - \alpha(x_1 + x_2) + \alpha^2}{x_1 x_2 - \beta(x_1 + x_2) + \beta^2},$$

oder:

$$3) \quad y^2 = - \frac{-b + \alpha a + \alpha^2}{-b + \beta a + \beta^2} = - \frac{b - \alpha a - \alpha^2}{b - \beta a - \beta^2}.$$

Hieraus findet man (da α und β aus 2) schon bekannt sind) y_1 und y_2 , und, indem man die linearen Gleichungen 1) nach x_1 und x_2 auflöst, auch diese Grössen.

2) Die cubische Gleichung

$$x^3 + ax^2 + bx = c.$$

Wir stellen die Hilfsgleichung auf:

$$y^3 - (y_1 + y_2 + y_3)y^2 + (y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1)y = y_1 y_2 y_3$$

und die Bedingungsgleichungen:

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0; \quad y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1 = 0,$$

welche letztere, durch $y_1 y_2 y_3$ dividirt, die Form erhält:

$$\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3} = 0.$$

Ferner setzen wir:

$$1) \quad y_1 = \frac{x_1 - \alpha}{x_1 - \beta}; \quad y_2 = \frac{x_2 - \alpha}{x_2 - \beta}; \quad y_3 = \frac{x_3 - \alpha}{x_3 - \beta}.$$

Dann lauten die beiden Bedingungsgleichungen:

$$\frac{x_1 - \alpha}{x_1 - \beta} + \frac{x_2 - \alpha}{x_2 - \beta} + \frac{x_3 - \alpha}{x_3 - \beta} = 0; \quad \frac{x_1 - \beta}{x_1 - \alpha} + \frac{x_2 - \beta}{x_2 - \alpha} + \frac{x_3 - \beta}{x_3 - \alpha} = 0.$$

Die erste erhält nach Entfernung der Nenner die Gestalt:

$$3x_1 x_2 x_3 - (2\beta + \alpha)(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1) + (\beta^2 + 2\alpha\beta)(x_1 + x_2 + x_3) - 3\alpha\beta^2 = 0,$$

oder, da $x_1 + x_2 + x_3 = -a$, $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = b$, $x_1 x_2 x_3 = c$ ist, und die zweite Bedingungsgleichung aus der ersten durch Vertauschung von α und β hervorgeht:

$$2) \quad \begin{cases} 3c - (2\beta + \alpha)b - (\beta^2 + 2\alpha\beta)a - 3\alpha\beta^2 = 0; \\ 3c - (2\alpha + \beta)b - (\alpha^2 + 2\alpha\beta)a - 3\beta\alpha^2 = 0. \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen bestimmen α und β vollständig.

Anm. Um die Werthe von α und β zu erhalten, subtrahirt man die zweite Gleichung von der ersten, und erhält:

$$-(\beta - \alpha)b - (\beta^2 - \alpha^2)a - 3\alpha\beta(\beta - \alpha) = 0,$$

oder, wenn man durch $-(\beta - \alpha)$ dividirt:

$$b + (\beta + \alpha)a + 3\alpha\beta = 0.$$

Addirt man ferner die Gleichungen 2), so folgt:

$$6c - 3(\alpha + \beta)b - [(\alpha + \beta)^2 + 2\alpha\beta]a - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 0.$$

Betrachtet man in diesen letzten Gleichungen $\alpha + \beta$ und $\alpha\beta$ als Unbekannte, so ist die erste linear, die zweite quadratisch, also sind $\alpha + \beta$ und $\alpha\beta$, und folglich auch α und β selbst ohne Schwierigkeit bestimmbar.

Die Hilfsgleichung geht über in

$$y^3 = y_1 y_2 y_3,$$

oder, wenn wir die Werthe 1) einsetzen:

$$3) \quad y^3 = \frac{(x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha)(x_3 - \alpha)}{(x_1 - \beta)(x_2 - \beta)(x_3 - \beta)} = \frac{c - \alpha b - \alpha^2 a - \alpha^3}{c - \beta b - \beta^2 a - \beta^3}.$$

Hieraus findet man y_1, y_2, y_3 , und, indem man die linearen Gleichungen 1) nach x_1, x_2, x_3 auflöst, auch diese Grössen.

3) Die biquadratische Gleichung

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx = d.$$

Wir stellen die Hilfsgleichung auf:

$$y^4 - (y_1 + y_2 + \dots)y^3 + (y_1 y_2 + y_3 y_4 + \dots)y^2 - (y_1 y_2 y_3 + y_2 y_3 y_4 + \dots)y = -y_1 y_2 y_3 y_4,$$

und die Bedingungsgleichungen:

$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$; $y_1 y_2 y_3 + y_2 y_3 y_4 + y_3 y_4 y_1 + y_4 y_1 y_2 = 0$,
welche letztere, durch $y_1 y_2 y_3 y_4$ dividirt, die Form erhält:

$$\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3} + \frac{1}{y_4} = 0.$$

Ferner setzen wir:

$$1) \quad y_1 = \frac{x_1 - \alpha}{x_1 - \beta}; \quad y_2 = \frac{x_2 - \alpha}{x_2 - \beta}; \quad y_3 = \frac{x_3 - \alpha}{x_3 - \beta}; \quad y_4 = \frac{x_4 - \alpha}{x_4 - \beta}.$$

Dann lauten die beiden Bedingungsgleichungen:

$$\frac{x_1 - \alpha}{x_1 - \beta} + \frac{x_2 - \alpha}{x_2 - \beta} + \frac{x_3 - \alpha}{x_3 - \beta} + \frac{x_4 - \alpha}{x_4 - \beta} = 0;$$

$$\frac{x_1 - \beta}{x_1 - \alpha} + \frac{x_2 - \beta}{x_2 - \alpha} + \frac{x_3 - \beta}{x_3 - \alpha} + \frac{x_4 - \beta}{x_4 - \alpha} = 0.$$

Beseitigt man in der ersten die Nenner,*) beachtet, dass $x_1 + x_2 + \dots = -a$, $x_1 x_2 + x_3 x_4 + \dots = b$, $x_1 x_2 x_3 + x_2 x_3 x_4 + \dots$

*) Aus dem ersten Gliede: $(x_1 - \alpha)(x_2 - \beta)(x_3 - \beta)(x_4 - \beta) = x_1 x_2 x_3 x_4 - \beta(x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_4) + \beta^2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4) - x_1 \beta^3 - \alpha x_2 x_3 x_4 + \alpha \beta(x_2 x_3 + x_3 x_4 + x_4 x_2) - \alpha \beta^2(x_2 + x_3 + x_4) + \alpha \beta^3$ findet man das zweite, indem man statt der Indices 1, 2, 3, 4 resp. 2, 3, 4, 1 setzt, und ebenso aus dem zweiten das dritte u. s. f.

$= -c$, $x_1 x_2 x_3 x_4 = -d$ ist, und bildet aus der ersten Gleichung die zweite durch Vertauschung von α und β , so folgt:

$$2) \begin{cases} -4d + (3\beta + \alpha)c + 2\beta(\alpha + \beta)b + \beta^2(3\alpha + \beta)a + 4\alpha\beta^3 = 0; \\ -4d + (3\alpha + \beta)c + 2\alpha(\alpha + \beta)b + \alpha^2(3\beta + \alpha)a + 4\beta\alpha^3 = 0. \end{cases}$$

Diese beiden Gleichungen bestimmen α und β vollständig.

Anm. Um die Werthe von α und β zu erhalten, subtrahirt man die zweite Gleichung von der ersten und erhält:

$$2c(\beta - \alpha) + 2(\alpha + \beta)b(\beta - \alpha) + [\beta^3 - \alpha^3 + 3\alpha\beta(\beta - \alpha)]a + 4\alpha\beta(\beta^2 - \alpha^2) = 0,$$

oder, wenn man durch $\beta - \alpha$ dividirt:

$$2c + 2(\alpha + \beta)b + (\beta^2 + 4\alpha\beta + \alpha^2)a + 4\alpha\beta(\alpha + \beta) = 0,$$

oder:

$$a) \quad 2c + 2(\alpha + \beta)b + [(\alpha + \beta)^2 + 2\alpha\beta]a + 4\alpha\beta(\alpha + \beta) = 0.$$

Addirt man ferner die Gleichungen 2), so folgt:

$$-8d + 4(\alpha + \beta)c + 2(\alpha + \beta)^2b + (\alpha + \beta)^3a + 4\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2) = 0,$$

oder:

$$b) \quad -8d + 4(\alpha + \beta)c + 2(\alpha + \beta)^2b + (\alpha + \beta)^3a + 4\alpha\beta[(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta] = 0.$$

Setzt man ferner $\alpha + \beta = u$, $\alpha\beta = v$, multiplicirt a) mit u und subtrahirt diese Gleichung von b), so bleibt nach Division durch 2:

$$c) \quad -4d + cu - auv - 4v^2 = 0,$$

oder:

$$u = \frac{4(v^2 + d)}{c - av}.$$

Dieser Werth wird in

$$a) \quad 2c + 2u(b + 2v) + (u^2 + 2v)a = 0$$

eingesetzt, und man erhält eine Gleichung vom 3. Grade in v . Aus dieser lässt sich v , sodann u , und schliesslich α und β auf bekannte Weise bestimmen.

Die Hilfspgleichung geht über in

$$y^4 + (y_1 y_2 + y_3 y_4 + \dots) y^2 = -y_1 y_2 y_3 y_4,$$

oder, wenn wir die Werthe 1) einsetzen:*)

$$y^4 + \frac{-6d + 3(\alpha + \beta)c + (\alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha\beta)b + 3\alpha\beta(\alpha + \beta)a + 6\alpha^2\beta^2}{-d + \beta c + \beta^2 b + \beta^3 a + \beta^4} y^2 \\ = \frac{-d + \alpha c + \alpha^2 b + \alpha^3 a + \alpha^4}{-d + \beta c + \beta^2 b + \beta^3 a + \beta^4}.$$

Aus dieser Gleichung, die, wenn man $y^2 = z$ setzt, eine gemischt-quadratische ist, findet man y_1, y_2, y_3, y_4 , und, indem man die linearen Gleichungen 1) nach x_1, x_2, x_3, x_4 auflöst, auch diese Grössen.

*) Aus $y_1 y_2 = \frac{(x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha)(x_3 - \beta)(x_4 - \beta)}{(x_1 - \beta)(x_2 - \beta)(x_3 - \alpha)(x_4 - \alpha)}$ geht $y_3 y_4$ hervor, wenn man im Dividend α und β vertauscht. Ferner aus $y_1 y_2 + y_3 y_4$ die beiden anderen entsprechenden Ausdrücke, indem man statt der Indices 1, 2, 3 resp. 2, 3, 1 setzt.

Anm. Bei Gleichungen von höherem Grade führt die hier befolgte Methode nicht zum Ziele, da die Beseitigung zweier Glieder nicht ausreicht, um die gegebene Gleichung auf eine solche von niedrigerem Grade zu reduciren. Ueberhaupt sind dieselben im Allgemeinen durch algebraische Methoden nicht lösbar. Auch lässt sich einstweilen von ihren Eigenschaften nur sagen, dass man aus n gegebenen Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_n$ eine Gleichung n^{ten} Grades bilden kann, deren Wurzeln diese Zahlen sind, und dass zwischen den Wurzeln und Coefficienten dieser allgemeinen Gleichung analoge Beziehungen existiren, wie wir sie bei den Gleichungen vom 2., 3. und 4. Grade kennen lernten. Ueber Elimination einer Unbekannten aus zwei höheren Gleichungen s. Nr. 157, 2).

II. Exponentialgleichungen.

119. Auflösung.*) — Eine Exponentialgleichung ist lösbar, wenn sie sich durch die Substitution

$$a^x = y$$

auf eine lösbare algebraische Gleichung zurückführen lässt.

Anm. Die gegebene Gleichung ist also derartig umzuformen, dass x nur in den Verbindungen $a^x, a^{2x}, a^{3x} \dots$ vorkommt.

Es genügt daher, die Gleichung

$$a^x = b$$

zu betrachten, in welche die obige Gleichung übergeht, nachdem für y aus einer algebraischen Gleichung der Werth b gefunden ist. Indem man die Gleichung $a^x = b$ nach einer beliebigen Zahl n logarithmirt, erhält man

$$x \cdot {}^n\!l a = {}^n\!l b.$$

oder:

$$x = \frac{{}^n\!l b}{{}^n\!l a},$$

wodurch die Gleichung gelöst ist.

(Aufgaben: Hofmann 3. Elfter Abschn. VI. — Bardey XXII.)

D. Die Reihen.

120. Vorbemerkung. — Die Division zweier Polynome giebt nach zwei Seiten zur Bildung eines neuen Begriffes Anlass. Erstens bemerkt man bei Ausführung von Divisionen wie $\frac{a^n - b^n}{a - b}, \frac{1}{1 \pm x}$, dass jedes Glied des Quotienten in gesetz-

*) Beispiel s. am Schluss des Buches in der „Uebersicht der Formeln und Regeln“.

mässiger Weise aus dem vorhergehenden gebildet werden kann, sodass, wenn nach Berechnung einiger Glieder das Bildungsgesetz klar wird, man die folgenden Glieder nicht mehr auf dem Wege der Division, sondern durch Anwendung dieses Bildungsgesetzes bestimmt. Dabei erhebt sich die Frage nach den verschiedenen möglichen Bildungsgesetzen, eine Frage, welche durch die Lehre von den Reihen beantwortet wird. Zweitens wurde schon gelegentlich der Division zweier Polynome gezeigt, dass, wenn der Divisor kein Factor des Dividend ist, der Quotient eine endlose Anzahl von Gliedern besitzt, und dass die Aufstellung solcher Quotienten eine Erweiterung des Polynom-Begriffs in sich schliesst. Hierdurch gelangen wir zum Begriff der unendlichen Reihe, deren besondere Eigenschaften zu ermitteln sein werden.

Die Glieder einer Reihe können entweder durch Addition oder durch Multiplication mit einander verbunden sein; hiernach können wir Reihen erster oder zweiter Stufe unterscheiden.

Ferner kann jedes Glied einer Reihe aus dem vorhergehenden mittelst derselben Zahl gebildet sein, oder mittelst einer Folge von Zahlen, die selbst wieder eine Reihe bilden. Hiernach unterscheidet man Reihen verschiedener Ordnung.

Endlich kann die Zahl, durch welche ein Glied aus dem vorhergehenden gebildet wird, demselben entweder durch Addition, Multiplication oder Potenzirung hinzugefügt werden. Hiernach unterscheidet man Summenreihen, Productreihen und Potenzreihen.

Anm. Ist die hinzugefügte Zahl im ersten Falle eine negative, im zweiten und dritten eine umgekehrte Zahl, so wird das folgende Glied durch Subtraction, Division, Radicirung gebildet, und die Reihe heisst fallend. Andernfalls heisst sie steigend.

Noch allgemeiner, als es in der letzten Eintheilung geschah, kann der Begriff der Reihe gefasst werden durch Verallgemeinerung des Gesetzes, nach welchem ein Glied aus dem vorhergehenden gebildet wird. Solche Reihen bleiben jedoch für's Erste von unserer Betrachtung ausgeschlossen.

I. Die Summenreihe (arithmetische Reihe).

1. Reihen erster Ordnung.

a. Reihen erster Stufe.

121. Erklärungen. — 1) Eine Summe s von Gliedern, welche durch wiederholte Addition derselben Zahl d aus einer Zahl a gebildet sind, heisst eine arithmetische Reihe (erster Ordnung).

2) Das erste Glied a heisst Anfangsglied, der wiederholte Summand d die Differenz, und das letzte Glied u das Endglied der Reihe. Die allgemeine Form der Reihe ist

$$1) \quad s = a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + u. \quad 123.$$

Bezeichnet man die Glieder der Reihe durch $a_1, a_2, \dots a_n, \dots$ so ist das n^{te} Glied (das allgemeine Glied)

$$a_n = a + (n - 1)d.$$

Aus diesem Ausdruck erhält man alle Glieder der Reihe, wenn man $n = 1, 2, 3, \dots$ setzt. Ist n die Gesamtzahl der Glieder (wie von nun an stets angenommen wird), so ist $u = a_n$. Die Differenz einer gegebenen Reihe erhält man, indem man ein Glied vom folgenden subtrahirt.

122. Eigenschaften der arithmetischen Reihe. — 1) Durch drei der vier Zahlen a, n, d, u ist eine arithmetische Reihe vollkommen bestimmt. — Denn aus der Gleichung

$$2) \quad u = a + (n - 1)d \quad 124.$$

lässt sich, wenn drei der vier Buchstaben a, n, d, u gegeben sind, der Werth des vierten bestimmen.

Anm. Man bestimme aus dieser Gleichung die Werthe von a, n, d .

2) Die Summe des n^{ten} Gliedes von links und des n^{ten} Gliedes von rechts ist für jeden Werth von n dieselbe, nämlich $a + u$. — Denn von rechts nach links gelesen, lautet die Reihe:

$$3) \quad s = u + (u - d) + (u - 2d) + \dots + a,$$

und man sieht, dass die gleichvielten Glieder von 1) und 3) stets die Summe $a + u$ geben.

3) Addirt man 1) und 3), so folgt:

$$2s = (a + u) + (a + u) + \dots (n \text{ mal}) = (a + u)n,$$

folglich:

$$4) \quad s = (a + u) \cdot \frac{n}{2}. \quad 125.$$

Anm. Auch in 4) lässt sich jeder der vier Buchstaben durch die drei anderen ausdrücken. — Mittels der Hauptformeln 2) und 4) lässt sich jede Aufgabe aus der Lehre von den arithmetischen Reihen 1. Ordnung lösen.

4) Setzt man den Werth von u aus 2) in 4) ein, so folgt:

$$126. \quad 5) \quad s = [2a + (n - 1)d] \frac{n}{2} = an + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d.$$

Anm. Die Formeln 2) 4) 5) enthalten von den 5 Stücken der Reihe: a, d, n, u, s , je vier. Es fehlt s in 2), d in 4), u in 5). Man stelle durch Elimination von n und a zwischen 2) und 4) die beiden noch fehlenden Formeln 6), 7) auf, welche je einen dieser Buchstaben nicht enthalten. — Man suche endlich aus 5), 6), 7) die drei rechts stehenden Buchstaben zu bestimmen, ebenso wie oben aus 2) und 4). Da aus jeder der 5 Formeln 2), 4), 5), 6), 7) vier Buchstaben bestimmt werden können, würde man im Ganzen 20 Formeln erhalten. In welchen Fällen aber ist die Bestimmung eines Buchstabens mit den bisherigen Hilfsmitteln nicht ausführbar?

(Aufgaben: Hofmann 3. Fünfzehnter Abschn. I. — Bardey XXXII. A.)

123. Specielle Fälle. — Für $d = 0$ verwandelt sich die arithmetische Reihe, wie unmittelbar aus 1) oder 5) hervorgeht, in das Product an , oder, wenn $a = 1$ ist, in die Zahl n . Das Product ist also ein specieller Fall der arithmetischen Reihe und bildet den Uebergang von der steigenden zur fallenden Reihe. — Die Reihe ist also steigend, wenn $d > 0$, ein Product, wenn $d = 0$, fallend, wenn $d < 0$ ist.

Anm. Wie heisst die n^{te} gerade, wie die n^{te} ungerade Zahl? Wie gross ist die Summe der n ersten natürlichen, der n ersten geraden, der n ersten ungeraden Zahlen?

124. Die unendliche arithmetische Reihe. — Betrachten wir die den Werthen $d = 0$ und $a = 1$ entsprechende Reihe

$$1 + 1 + 1 + \dots$$

Ist die Anzahl ihrer Glieder eine beschränkte, so drückt diese Reihe eine Zahl von ganz bestimmter Grösse aus. Denken wir uns aber die Anzahl der Glieder ohne Ende zunehmend, so wird diese Zahl unendlich gross, und die Anzahl der in ihr enthaltenen Einheiten ist eine unbestimmte. Man bezeichnet die unendlich grosse Zahl durch ∞ (gelesen „unendlich“), und nennt alle anderen Zahlen im Gegensatze zu ihr endliche.

Anm. Da die unendlich grosse Zahl im Gegensatze zu allen übrigen Zahlen keinen bestimmten Werth hat, so macht sie auch fast in allen Rechnungen, in denen sie auftritt, den Werth des Resultates unbestimmt. (Vgl. 149). Im Gegensatze zu allen übrigen Zahlen hat sie auch, wenn sie in derselben Rechnung mehrmals auftritt, verschiedene Werthe. — Ihrem Begriff nach bleibt sie unendlich, wenn man eine endliche Zahl zu ihr addirt oder von ihr subtrahirt, wenn man sie mit einer endlichen Zahl multiplicirt, dividirt, potenzirt oder radicirt. Daher ist

$$127. \quad \begin{array}{lll} \infty + a = \infty; & \infty \cdot a = \infty; & \infty^a = \infty; \\ \infty - a = \infty; & \infty : a = \infty; & \sqrt[a]{\infty} = \infty, \end{array}$$

wobei jedoch a in den Formeln der 2. und 3. Rechnungsstufe nicht Null sein darf. Es folgt ferner, dass die Ausdrücke $\infty - \infty$, $\infty : \infty$, $l \infty$ jede endliche Zahl a bedeuten können. Andere Formeln über die Rechnungen mit ∞ werden sich später ergeben. Noch ist zu bemerken, dass die unendlich grosse Zahl positiv oder negativ sein kann, je nachdem man sie aus positiven oder negativen Einheiten entstanden denkt.

Ebenso wie der Werth der Reihe $1 + 1 + \dots$, ist auch der von $a + a + \dots$ unendlich, sobald a eine endliche Zahl (ausser Null) ist. Denn es ist $a + a + \dots = a(1 + 1 + \dots) = a \cdot \infty = \infty$.

Endlich ist der Werth jeder unendlichen arithmetischen Reihe unendlich. Denn das allgemeine Glied $a + (n - 1)d$ wird, wenn $n = \infty$ ist, nach den oben in der Anm. gegebenen Formeln (und auch aus unmittelbar einleuchtenden Gründen) selbst unendlich, umsomehr also der Werth der ganzen Reihe.

b. Reihen zweiter Stufe.

125. Vorbemerkung. — Wenn die Glieder einer arithmetischen Reihe erster Ordnung nicht durch Addition, sondern durch Multiplication verbunden werden, so hat man eine Reihe zweiter Stufe. Die allgemeine Form dieser Reihe ist also:

$$p = a(a + d)(a + 2d) \dots u,$$

und ihr allgemeines Glied

$$a_n = a + (n - 1)d.$$

Wir beschäftigen uns im Folgenden nur mit einer speciellen Art dieser Reihen, nämlich derjenigen, für welche

$$d = -1$$

ist, und betrachten den Quotienten von zwei derartigen n -gliedrigen Reihen, deren Anfangsglieder a und n sind.

126. Erklärungen. — 1) Das Product der ersten n ganzen Zahlen heisst die Facultät von n , wird durch $n!$ bezeichnet und „ n Facultät“ gelesen.

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = n(n - 1)(n - 2) \dots 2 \cdot 1 = n!$$

2) Der Quotient zweier n -gliedriger arithmetischer Reihen zweiter Stufe, deren Differenz -1 ist, und deren Anfangsglieder a und n sind, heisst die n^{te} Factorielle von a , und wird durch $a \cdot^n$ bezeichnet und „ a Punkt n “ gelesen. a heisst Grundzahl, n Exponent der Factorielle.

$$1) \frac{a(a - 1)(a - 2) \dots [a - (n - 1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} = a \cdot^n.$$

128.

127. Andere Formen der Factorielle. — Durch Erweiterung mit $(a - n)!$ erhält die Factorielle 1) die Form:

$$a \cdot n = \frac{a(a-1)(a-2) \dots [a-(n-1)] \cdot (a-n)(a-n-1) \dots 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \dots n \cdot 1 \cdot 2 \dots (a-n)},$$

oder:

$$129. \quad 2) \quad a \cdot n = \frac{a!}{n!(a-n)!} = \frac{1 \cdot 2 \dots a}{1 \cdot 2 \dots n \cdot 1 \cdot 2 \dots (a-n)},$$

woraus durch Division mit $(1 \cdot 2 \dots n)$ die neue Form hervorgeht:

$$130. \quad 3) \quad a \cdot n = \frac{(n+1)(n+2) \dots a}{1 \cdot 2 \dots (a-n)}.$$

128. Factoriellengebiet einer Zahl. Aus der Erklärung der Factorielle folgt, dass n eine ganze positive Zahl sein muss, während a , wenn man nur die Form 1) benutzt, eine beliebige Zahl sein kann, dagegen in 2) und 3) ebenfalls ganz und positiv sein muss. Ferner muss $a > n$ sein. — Zu einer gegebenen Zahl a gehört daher nur eine bestimmte Anzahl von Factoriellen, nämlich von $a \cdot 0$ bis $a \cdot a$, die man das Factoriellengebiet von a nennen kann. Man erhält aus 3) für $n=0$

$$131. \quad a \cdot 0 = \frac{!}{a!} = 1,$$

und aus 1) für $n=a$

$$132. \quad a \cdot a = \frac{a!}{a!} = 1.$$

129. Beziehung zwischen 2 Factoriellen mit der Exponentensumme a . — Setzt man in 1) $a-n$ für n , so erhält man

$$\frac{a(a-1)(a-2) \dots [a-(a-n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (a-n)} = a \cdot (a-n).$$

Da aber $[a-(a-n-1)] = n+1$, so ist die linke Seite dieser Formel gleich der rechten Seite von 3); mithin auch:

$$133. \quad a \cdot (a-n) = a \cdot n.$$

Es bilden also die auf einander folgenden Factoriellen einer ganzen positiven Zahl a , von der 0^{ten} bis zur a^{ten} eine Reihe, in welcher je zwei Glieder gleich sind, die gleichen Abstand von der Mitte haben.

130. Beziehung zwischen 2 benachbarten Factoriellen. — Setzt man in 1) $n+1$ für n , so folgt:

$$a \cdot (n+1) = \frac{a(a-1) \dots (a-n)}{1 \cdot 2 \dots (n+1)} = \frac{a(a-1) \dots [a-(n-1)]}{1 \cdot 2 \dots n} \cdot \frac{a-n}{n+1};$$

oder:

$$a \cdot (n+1) = \frac{a-n}{n+1} \cdot a \cdot n. \quad 134.$$

Anm. Für $n=1$ und $a=0$ folgt hieraus: $0 \cdot 2 = -\frac{1}{2} 0 \cdot 1$, oder, da $0 \cdot 1$ nach dem Begriff der Factorielle gleich Null ist: $0 \cdot 2 = 0$. Ebenso ist allgemein $0 \cdot n = 0$, sobald $n > 0$ ist.

Setzt man in 134 $n-1$ für n , so folgt:

$$a \cdot n = \frac{a-n+1}{n} \cdot a \cdot (n-1)$$

oder:

$$a \cdot (n-1) = \frac{n}{a-n+1} \cdot a \cdot n. \quad 135.$$

Für $n=a$ erhält man aus der vorigen Formel (134):

$$a \cdot (a+1) = 0; \quad 135a.$$

mithin sind auch alle folgenden Factoriellen von a gleich Null.

Für $n=0$ erhält man aus 135:

$$a \cdot (-1) = 0. \quad 135b.$$

131. Beziehung zwischen den Factoriellen zweier benachbarter Zahlen. — Setzt man in 2) $(a+1)$ statt a , so folgt:

$$\begin{aligned} (a+1) \cdot n &= \frac{(a+1)!}{n!(a+1-n)!} = \frac{a!}{n!(a-n)!} \cdot \frac{a+1}{a+1-n} \\ &= \frac{a+1}{a+1-n} \cdot a \cdot n = \left[1 + \frac{n}{a+1-n} \right] a \cdot n \\ &= a \cdot n + \frac{n}{a+1-n} \cdot a \cdot n; \end{aligned}$$

$$\text{also:} \quad (a+1) \cdot n = a \cdot n + a \cdot (n-1) \quad (\text{nach 135}). \quad 136.$$

Anm. Für $n=1$, $a=0$ ist $1 \cdot 1 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0$; also, da $1 \cdot 1 = 1$ und $0 \cdot 1 = 0$ ist, $0 \cdot 0 = 1$.

Für $n=2$ ist $(a+1) \cdot 2 = a \cdot 2 + a$;

$$\begin{aligned} \text{also für } a=2 \quad & 3 \cdot 2 = 2 \cdot 2 + 2 = 1 + 2; \\ a=3 \quad & 4 \cdot 2 = 3 \cdot 2 + 3 = 1 + 2 + 3; \\ \dots \quad & \dots \end{aligned}$$

$$a=n \quad (n+1) \cdot 2 = n \cdot 2 + n = 1 + 2 + \dots + n,$$

eine schon bekannte Formel.

132. Factorielle einer Summe. — Setzt man in der letzten Formel (136) $a+1$ für a , so folgt:

$$\begin{aligned} (a+2) \cdot n &= (a+1) \cdot n + (a+1) \cdot (n-1) \\ &= a \cdot n + a \cdot (n-1) + a \cdot (n-1) + a \cdot (n-2) \quad (136) \\ &= a \cdot n + 2 \cdot 1 \cdot a \cdot (n-1) + a \cdot (n-2). \end{aligned}$$

Setzt man hierin wieder $a + 1$ für a , so folgt:

$$\begin{aligned}(a + 3) \cdot^n &= (a + 1) \cdot^n + 2 \cdot^1 (a + 1) \cdot^{(n-1)} + (a + 1) \cdot^{(n-2)} \\ &= a \cdot^n + a \cdot^{(n-1)} + 2 \cdot^1 a \cdot^{(n-1)} + 2 \cdot^1 a \cdot^{(n-2)} + a \cdot^{(n-2)} + a \cdot^{(n-3)} \\ &= a \cdot^n + 3 \cdot^1 a \cdot^{(n-1)} + 3 \cdot^2 a \cdot^{(n-2)} + a \cdot^{(n-3)}.\end{aligned}$$

Allgemein wird gelten:

$$137. \quad (a + b) \cdot^n = a \cdot^n b \cdot^0 + a \cdot^{(n-1)} b \cdot^1 + a \cdot^{(n-2)} b \cdot^2 + \dots + a \cdot^0 b \cdot^n,$$

wenn diese Formel auch noch für $a + b + 1$ gilt. — Denn da sie für $b = 1, 2, 3$ gilt (wie eben gezeigt), so gilt sie, wenn die eben gemachte Annahme richtig ist, auch für $b = 4$, sodann für $b = 5$ u. s. w., d. h. sie gilt allgemein. — Nun ist, wenn man in 137 $a + 1$ für a setzt:

$$\begin{aligned}(a + 1 + b) \cdot^n &= (a + 1) \cdot^n b \cdot^0 + (a + 1) \cdot^{(n-1)} b \cdot^1 + (a + 1) \cdot^{(n-2)} b \cdot^2 + \dots + \\ &\quad (a + 1) \cdot^0 b \cdot^n \\ &= a \cdot^n b \cdot^0 + a \cdot^{(n-1)} b \cdot^1 + a \cdot^{(n-2)} b \cdot^2 + \dots + a \cdot^0 b \cdot^n \\ &\quad + a \cdot^{(n-1)} b \cdot^0 + a \cdot^{(n-2)} b \cdot^1 + a \cdot^{(n-3)} b \cdot^2 + \dots + a \cdot^0 b \cdot^{(n-1)} \quad (\text{n. 136}) \\ &= (a + b) \cdot^n + (a + b) \cdot^{(n-1)} \quad (\text{nach 137}).\end{aligned}$$

Da diese Formel (nach 136) richtig ist, so gilt 137 auch für $a + b + 1$, also allgemein.

Anm. Welche Gestalt nimmt 137 an, wenn man $a = b (= n)$ setzt und 133 anwendet?

133. *Factorielle einer negativen Zahl.* — Setzt man in der Form 1) (128) $-a$ für a , so folgt:

$$(-a) \cdot^n = \frac{(-a)(-a-1)(-a-2) \dots [-a-(n-1)]}{1 \cdot 2 \dots n},$$

oder, wenn man Dividend und Divisor mit $(-1)^n$ multiplicirt:

$$(-a) \cdot^n = \frac{a(a+1)(a+2) \dots [a+(n-1)]}{1 \cdot 2 \dots n (-1)^n},$$

oder, mit $(a-1)!$ multiplicirt und dividirt:

$$(-a) \cdot^n = \frac{[a+(n-1)]!}{(a-1)! n!} \cdot (-1)^n,$$

oder, nach 129 (wenn man darin $a + n - 1$ für a setzt):

$$138. \quad (-a) \cdot^n = (-1)^n \cdot (a + n - 1) \cdot^n.$$

Mittelst dieser Formel ist die Factorielle einer negativen Zahl durch diejenige einer positiven ausgedrückt. Da $a + n - 1$ stets $> n$ ist, so kann in dieser Formel $a < n$ sein.

134. *Factorielle einer umgekehrten Zahl.* — Setzt man in 128 $\frac{1}{a}$ für a , so folgt:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{\cdot n} = \frac{\frac{1}{a} \left(\frac{1}{a} - 1\right) \left(\frac{1}{a} - 2\right) \dots \left[\frac{1}{a} - (n-1)\right]}{1 \cdot 2 \dots n},$$

oder, wenn man Dividend und Divisor mit a^n multiplicirt:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{\cdot n} = \frac{(1-a)(1-2a)\dots[1-(n-1)a]}{a^n \cdot 1 \cdot 2 \dots n}. \quad 139.$$

(Aufgaben: Hofmann 3. Siebzehnter Abschn. 1—9.)

2. Reihen höherer Ordnung.

135. Summenreihen. — Man kann die Summen der ersten 1, 2, 3, ... Glieder einer Reihe als Glieder einer neuen Reihe betrachten, welche die erste Summenreihe der gegebenen Reihe heisst, und welcher man das Anfangsglied 0 giebt. Ist die gegebene Reihe

$$1) \ a_1 + a_2 + a_3 + \dots,$$

so ist hiernach ihre erste Summenreihe

$$0 + a_1 + (a_1 + a_2) + (a_1 + a_2 + a_3) + \dots,$$

oder, wenn man

$$2) \ 0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_{n+1}$$

setzt:

$$3) \ b_1 + b_2 + b_3 + \dots$$

Die erste Summenreihe von 3) heisst die zweite Summenreihe von 1), und allgemein heisst die erste Summenreihe der $(n-1)^{\text{ten}}$ Summenreihe von 1) die n^{te} Summenreihe von 1).

136. Differenzreihen. — Umgekehrt kann man die Differenzen je zweier benachbarter Glieder von 3) als Glieder einer neuen Reihe 1) betrachten, welche die erste Differenzreihe von 3) heisst. — Denn aus 2) folgt

$$4) \ b_{n+1} - b_n = a_n; \quad 140.$$

mithin sind in der That die Differenzen der Reihe 3) den Gliedern der Reihe 1) gleich. Dabei ist $b_1 = 0$ zu setzen. Formel 4) liefert noch die Regel: Das n^{te} Glied der ersten Differenzreihe ist gleich der Differenz zwischen dem $(n+1)^{\text{ten}}$ und n^{ten} Gliede der gegebenen Reihe.

Die erste Differenzreihe von 1) heisst die zweite Differenzreihe von 3), und allgemein heisst die erste Differenzreihe der $(n+1)^{\text{ten}}$ Differenzreihe von 3) die n^{te} Differenzreihe von 3).

Anm. Bildet man zu einer Reihe, deren Anfangsglied 1, deren Differenz $n - 2$ ist (worin n eine beliebige ganze positive Zahl und > 1 ist) die erste Summenreihe, so heissen die Glieder derselben *neck-Zahlen* (oder *neckige Polygonalzahlen*), weil man jede dieser Zahlen durch eine ein *neck* bildende Gruppe von Punkten darstellen kann. So entstehen für

$n = 2$ aus $1 + 1 + 1 \dots$ die Zweieckzahlen $1, 2, 3, 4, \dots$

$n = 3$ „ $1 + 2 + 3 \dots$ „ Dreieckzahlen $1, 3, 6, 10, \dots$

$n = 4$ „ $1 + 3 + 5 \dots$ „ Viereckzahlen $1, 4, 9, 16, \dots$

$n = 5$ „ $1 + 4 + 7 \dots$ „ Fünfeckzahlen $1, 5, 12, 22, \dots$

$n = 6$ „ $1 + 5 + 9 \dots$ „ Sechseckzahlen $1, 6, 15, 28, \dots$

Die folgenden Figuren stellen die drei ersten von jeder Art der eben gebildeten Zahlen dar. Das Bildungsgesetz der Figuren ist leicht zu erkennen.



(Man bilde die Differenzreihen der Quadrat-, Cubik-Zahlen etc., und zeige, dass die n^{te} Differenzreihe der Reihe $1^n + 2^n + 3^n + \dots$ in jedem dieser Fälle aus Gliedern besteht, die alle gleich $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$ sind.)

Die erste Summenreihe der *neckigen* Polygonalzahlen liefert die n -seitigen Pyramidalzahlen. Man bilde dieselben, und untersuche auch die von oben nach unten gehenden Zahlenreihen.

137. Reihen n^{ter} Ordnung. — Die ursprünglich betrachtete arithmetische Reihe $a + (a + d) + (a + 2d) + \dots$, deren Differenzen alle einander gleich, aber von Null verschieden sind, heisst Reihe erster Ordnung, und ihre $(n - 1)^{\text{te}}$ Summenreihe: Reihe n^{ter} Ordnung. Hiernach ist die Ordnung der ersten Summenreihe einer gegebenen Reihe um 1 höher, die der ersten Differenzreihe um 1 niedriger als die der gegebenen Reihe. Und eine Reihe nullter Ordnung ist diejenige, deren Glieder alle einander gleich sind; oder, anders ausgedrückt: Ein Product ist eine Reihe nullter Ordnung.

Eine Reihe n^{ter} Ordnung ist also eine solche, deren $(n - 1)^{\text{te}}$ Differenzreihe eine Reihe erster, oder, deren n^{te} Differenzreihe eine Reihe nullter Ordnung ist.

Anm. Eine Reihe n^{ter} Ordnung ist z. B.: $1^n + 2^n + 3^n + \dots$ Vgl. vorige Anm.

138. Bestimmung des allgemeinen Gliedes der Reihe n^{ter} Ordnung. — Wir betrachten zuerst die Reihe der p^{ten} Factoriellen

$$0 \cdot p, 1 \cdot p, 2 \cdot p, \dots$$

Das n^{te} Glied derselben ist $(n - 1) \cdot p$, das $(n + 1)^{\text{te}}$ also $n \cdot p$. Bildet man die erste Differenzreihe derselben, so ist deren n^{tes} Glied (nach 140)

$$n \cdot p - (n - 1) \cdot p,$$

oder, da nach 136 (wenn man darin n statt $a + 1$ und p statt n setzt) $n \cdot p = (n - 1) \cdot p + (n - 1) \cdot (p - 1)$ ist:

$$(n - 1) \cdot p + (n - 1) \cdot (p - 1) - (n - 1) \cdot p = (n - 1) \cdot (p - 1).$$

Es ist also das n^{te} Glied in der gegebenen Reihe $(n - 1) \cdot p$, in ihrer ersten Differenzreihe $(n - 1) \cdot (p - 1)$, folglich in ihrer zweiten Differenzreihe (weil diese die erste Differenzreihe der ersten Differenzreihe ist) $(n - 1) \cdot (p - 2)$ und in ihrer p^{ten} Differenzreihe $(n - 1) \cdot (p - p) = (n - 1) \cdot 0 = 1$ (nach 131). — Die Glieder der p^{ten} Differenzreihe sind also alle gleich 1, und daher ist (nach der oben gegebenen Erklärung) die Reihe der Factoriellen

$$0 \cdot p, 1 \cdot p, 2 \cdot p, \dots$$

eine Reihe p^{ter} Ordnung, die mit ihren Differenzreihen die allgemeinen Glieder

$$(n - 1) \cdot p, (n - 1) \cdot (p - 1), \dots (n - 1) \cdot 0$$

und die Anfangsglieder (aus $n = 1$ hervorgehend)

$$0 \cdot p, 0 \cdot (p - 1), \dots 0 \cdot 0$$

hat, welche letzteren (nach Anm. zu 134 und 136) alle Null sind, mit Ausnahme des letzten, welches gleich 1 ist. Die für $p = 0, 1, 2, \dots$ sich ergebenden Factoriellenreihen lassen sich nun mit ihren wesentlichsten Eigenschaften, wie folgt, zusammenstellen:

	n^{tes} Glied der Reihe	Die ersten Glieder der Reihe	Anfangsglied			
			der Reihe	der 1. Dif- ferenz- reihe	der 2. Dif- ferenz- reihe	. . .
$p = 0$	$(n - 1) \cdot 0$	1 1 1 1 1 . .	1	0	0	. .
$p = 1$	$(n - 1) \cdot 1$	0 1 2 3 4 . .	0	1	0	. .
$p = 2$	$(n - 1) \cdot 2$	0 0 1 3 6 . .	0	0	1	. .
. . .	. . .		. .	. .	. .	. .

Multiplicirt man eine dieser Reihen, z. B. die der p^{ten} Ordnung, mit einer beliebigen Zahl, so wird offenbar nicht nur

ihr eignes Anfangs- und n^{tes} Glied, sondern auch alle Glieder ihrer Differenzreihen mit dieser Zahl multiplicirt (wie aus 140 ersichtlich ist). — Multiplicirt man also die oben in der Tabelle stehenden Reihen resp. mit $a, b, c, \dots$ so lauten die n^{ten} Glieder der neuen Reihen

$$a(n-1)^{\cdot 0}, b(n-1)^{\cdot 1}, c(n-1)^{\cdot 2}, \dots$$

ihre Anfangsglieder $a, 0, 0 \dots$, diejenigen ihrer ersten Differenzreihen $0, b, 0 \dots$ u. s. w.

Addirt man endlich alle diese Reihen, so ist 1) das n^{te} Glied der neuen Reihe gleich der Summe der n^{ten} Glieder der einzelnen Reihen, 2) das Anfangsglied der neuen Reihe gleich der Summe der Anfangsglieder der einzelnen Reihen, 3) das Anfangsglied von jeder Differenzreihe der neuen Reihe gleich der Summe der Anfangsglieder der gleichvielten Differenzreihen. *)

Mithin sind die Anfangsglieder der neuen Reihe und ihrer successiven Differenzreihen: $a, b, c, \dots$, und das allgemeine Glied der neuen Reihe:

$$141. \quad s_n = a(n-1)^{\cdot 0} + b(n-1)^{\cdot 1} + c(n-1)^{\cdot 2} + \dots$$

d. h.: Man findet das n^{te} Glied einer arithmetischen Reihe höherer Ordnung, wenn man die Summe bildet aus ihrem Anfangsgliede und denjenigen ihrer successiven Differenzreihen, jedes der letzteren multiplicirt mit der sovielten Factorielle von $(n-1)$, als der Rang der Differenzreihe beträgt.

Anm. Für die Reihe erster Ordnung, welche nur eine Differenzreihe besitzt, findet man hiernach $s_n = a + (n-1)b$; d. h. die Formel 124. — Für die neckigen Polygonalzahlen, welche Reihen zweiter Ordnung sind, findet man folgende Resultate: Die n^{te} Zweieckzahl ist n , die n^{te} Dreieckzahl $\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$, die n^{te} peckzahl (für welche $a = 1, b = p-1,$

$c = p-2$ ist): $1 + (p-1)(n-1) + (p-2)(n-1)^{\cdot 2} = \frac{n}{2}[(p-2)n - (p-4)]$.

Man bestimme ebenso die n^{te} pseitige Pyramidalzahl.

139. Bestimmung der Summe der Reihe n^{ter} Ordnung. — Setzt man in 140 n der Reihe nach gleich $1, 2, 3, \dots n$, so erhält man die Formeln:

*) Denn nach 140 ist, wenn b_1 und f_1 die Anfangsglieder zweier Reihen, und a_1 und e_1 die Anfangsglieder ihrer ersten Differenzreihen sind: $b_2 - b_1 = a_1$; $f_2 - f_1 = e_1$; also: $(b_2 + f_2) - (b_1 + f_1) = (a_1 + e_1)$.

$$\begin{aligned}
 b_2 - b_1 &= a_1 \\
 b_3 - b_2 &= a_2 \\
 b_4 - b_3 &= a_3 \\
 &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
 b_n - b_{n-1} &= a_{n-1} \\
 b_{n+1} - b_n &= a_n.
 \end{aligned}$$

Addirt man alle diese Formeln, so folgt:

$$b_{n+1} - b_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

oder:

$$b_{n+1} = b_1 + (a_1 + a_2 + \dots + a_n), \quad 142.$$

d. h.: Man erhält das $(n+1)^{\text{te}}$ Glied einer Reihe, indem man zu ihrem ersten Gliede die Summe der n ersten Glieder ihrer ersten Differenzreihe addirt.

Wenn nun die Anfangsglieder der Reihe $b_1, b_2 \dots$ und ihrer Differenzreihen die Zahlen $0, a, b, \dots$ sind, so sind die Anfangsglieder der Reihe $a_1, a_2, \dots$ und ihrer Differenzreihen die Zahlen $a, b, c \dots$. Da $b_1 = 0$, so ist nach 142

$$b_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Andrerseits ist nach 141 (wenn man darin $n+1$ für n , und $0, a, b, \dots$ resp. für $a, b, c \dots$ setzt):

$$b_{n+1} = a \cdot n + b \cdot n^2 + c \cdot n^3 + \dots,$$

folglich:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = a \cdot n^1 + b \cdot n^2 + c \cdot n^3 + \dots \quad 143.$$

d. h.: Man findet die Summe einer arithmetischen Reihe höherer Ordnung, wenn man die Summe bildet aus ihrem Anfangsgliede und denjenigen ihrer successiven Differenzreihen, jedes dieser Glieder multiplicirt mit der gleichvielten Factorielle von n .

Anm. Für die Reihe erster Ordnung findet man hiernach $S_n = na + \frac{n(n-1)}{2}b$; d. h. die Formel 126. — Für die Reihe der Quadratzahlen ist $a = 1, b = 3, c = 2$, folglich $S_n = n + 3 \cdot n^2 + 2 \cdot n^3 = \frac{n}{6}(2n^2 + 3n + 1)$; für die Cubikzahlen ist $a = 1, b = 7, c = 12, d = 6$, und $S_n = \frac{n^2}{4}(n+1)^2$. — Reihen höherer Ordnung von zweiter Stufe werden hier übergangen.

(Aufgaben: Hofmann 3. Fünfzehnter Absch. II. — Bardey XXXII. B.)

II. Die Productreihe (geometrische Reihe).

Vorbemerkung. — Wir betrachten hier nur die Productreihe erster Ordnung und erster Stufe.

140. Erklärungen. — 1) Eine Summe s von Gliedern, welche durch wiederholte Multiplication mit derselben Zahl q aus einer Zahl a gebildet sind, heisst eine geometrische Reihe.

2) Das erste Glied a heisst Anfangsglied, der wiederholte Factor q der Quotient, und das letzte Glied u das Endglied der Reihe. Die allgemeine Form der Reihe ist

$$144. \quad 1) \quad s = a + aq + aq^2 + \dots + u.$$

Bezeichnet man die Glieder der Reihe durch $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ so ist das n^{te} Glied (das allgemeine Glied)

$$a_n = a \cdot q^{n-1}.$$

Aus diesem Ausdruck erhält man alle Glieder der Reihe, wenn man $n = 1, 2, 3, \dots$ setzt. Ist n die Gesamtzahl der Glieder, so ist $u = a_n$. Den Quotienten einer gegebenen Reihe erhält man, indem man ein Glied durch das vorhergehende dividirt.

141. Eigenschaften der geometrischen Reihe. — 1) Durch drei der vier Zahlen a, n, q, u , ist eine geometrische Reihe vollkommen bestimmt. Denn aus der Gleichung

$$145. \quad 2) \quad u = aq^{n-1}$$

lässt sich, wenn drei der vier Buchstaben gegeben sind, der Werth des vierten bestimmen.

Anm. Man bestimme aus dieser Gleichung die Werthe von a, n, q .

2) Das Product des n^{ten} Gliedes von links und des n^{ten} Gliedes von rechts ist für jeden Werth von n dasselbe, nämlich au . Denn von rechts nach links gelesen lautet die Reihe

$$3) \quad s = u + \frac{u}{q} + \frac{u}{q^2} + \dots + a,$$

und man sieht, dass die gleichvielten Glieder von 1) und 3) stets das Product au geben.

3) Multiplicirt man 1) mit $(q - 1)$, so folgt:

$$\begin{aligned} s(q - 1) &= aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1} + uq \\ &\quad - a - aq - aq^2 - aq^3 - \dots - u \end{aligned}$$

oder, da die unter einander stehenden Glieder sich heben:

$$s(q - 1) = uq - a$$

oder endlich

$$146. \quad 4) \quad s = \frac{uq - a}{q - 1}.$$

Anm. Auch in 4) lässt sich jeder der vier Buchstaben durch die drei anderen ausdrücken. — Mittels der Hauptformeln 2) und 4) lässt sich jede Aufgabe aus der Lehre von den geometrischen Reihen lösen.

4) Setzt man den Werth von u aus 2) in 4) ein, so folgt:

$$5) \quad s = \frac{aq^n - a}{q - 1} = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}. \quad 147.$$

Anm. Die Formeln 2), 4), 5) enthalten von den 5 Stücken der Reihe: a, q, n, u, s , je vier. Es fehlt s in 2), n in 4), u in 5). Man stelle durch Elimination von a und q zwischen 2) und 4) die beiden noch fehlenden Formeln 6) und 7) auf, welche je einen dieser Buchstaben nicht enthalten. Man suche endlich aus 5), 6), 7) die drei rechts stehenden Buchstaben zu bestimmen, ebenso wie oben aus 2) und 4). Wie viele der 15, auf diese Weise aus 2), 4), 5), 6), 7) noch hervorgehenden Formeln lassen sich mit den bisherigen Hilfsmitteln nicht aufstellen?

142. Specielle Fälle. — Für $q = 1$ verwandelt sich die geometrische Reihe, wie aus 1) hervorgeht, in das Product an , oder, wenn $a = 1$ ist, in die Zahl n . Das Product ist also ein specieller Fall der geometrischen Reihe und bildet den Uebergang von der steigenden zur fallenden Reihe. — Die Reihe ist also steigend, wenn $q > 1$, ein Product, wenn $q = 1$, fallend, wenn $q < 1$ ist.

Anm. Formel 5) giebt für $q = 1$ den Werth $s = a \cdot \frac{0}{0}$. Es hat also, wie man durch Vergleichung sieht, $\frac{0}{0}$ hier den Werth n . (Vgl. 71.) — Für $a = 1$ giebt 1) in Verbindung mit 2): $s = q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q^2 + q + 1$, und 5): $s = \frac{q^n - 1}{q - 1}$; also

$$q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1 = \frac{q^n - 1}{q - 1}. \quad 147a.$$

(Vgl. Anm. zu 88). — Die Zahl q nehmen wir stets als positiv an; denn wäre $q = -q_1$, so wäre die Reihe 1) $s = (a + aq_1^2 + aq_1^4 + \dots) - (aq_1 + aq_1^3 + aq_1^5 + \dots) = (1 - q_1)(a + aq_1^2 + aq_1^4 + \dots)$, also wieder von derselben Art wie vorher.

143. Die unendliche geometrische Reihe. — Betrachten wir die dem Werthe $a = 1$ entsprechende Reihe

$$6) \quad s_1 = 1 + q + q^2 + \dots$$

Wenn die Gliederzahl dieser Reihe in's Unendliche zunimmt, sodass $n = \infty$ ist, so kommt es für die Beschaffenheit der Reihe darauf an, ob sie steigend, ein Product, oder fallend ist. Denn im ersten Falle werden ihre Glieder immer grösser, im zweiten sind sie alle gleich, im dritten werden sie immer kleiner. (Dies folgt, wenn man $q = \frac{1}{q_1}$ setzt, aus Anm. zu 83a.)

— Im ersten Falle nähern sich die Glieder der Grenze ∞ , sodass $u = \infty$ und $s = \infty$ ist (nach 4). Im zweiten Falle

sind alle Glieder gleich 1, also wiederum $s = \infty$ (als unendliche arithmetische Reihe). Im dritten Falle nähern sich die Glieder der Grenze 0, sodass $u = 0$, und $s = \frac{-1}{q-1}$ (nach 4)), oder, mit (-1) erweitert:

$$148. \quad 7) \quad s_1 = \frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \dots$$

Anm. Diese Formel, welche, wie wohl zu beachten ist, nur gilt, wenn $q < 1$ ist (denn nur unter dieser Voraussetzung wird in 4) $u = 0$), würde man auch durch Ausführung der Division $\frac{1}{1-q}$ (nach Regel 88) erhalten haben, jedoch ohne dass sich jene Beschränkung dabei herausstellte. Das allgemeine in Regel 88 aufgestellte Divisionsverfahren ist daher, falls es eine endlose Reihe von Gliedern liefert, nur für solche Werthe der Buchstaben anwendbar, welche ein beständiges Abnehmen der Glieder des Resultates herbeiführen, weil sonst die linke Seite einen endlichen, die rechte dagegen einen unendlichen Ausdruck darstellen würde, und diese beiden einander nicht gleich sein können.*)

Nähert sich in 7) q immer mehr dem Werthe 1, so nähert sich $q - 1$ dem Werthe 0, und $1 + q + q^2 + \dots$ dem Werthe ∞ , mithin ist ∞ der Werth von $\frac{1}{0}$, oder

*) Der Grund dieser Erscheinung liegt schliesslich darin, dass mit wachsender Gliederzahl das Resultat, wenn $q < 1$ ist, sich dem wahren Werthe von $\frac{1}{1-q}$ immer mehr nähert, dagegen sich immer mehr von demselben entfernt, wenn $q > 1$ ist. Denn in diesem Falle ist $\frac{1}{1-q}$ eine negative Zahl, von der sich offenbar der positive Werth der rechten Seite um so mehr entfernt, je grösser er ist.

Setzt man in 7) $q = -r$, so folgt:

$$\frac{1}{1+r} = 1 - r + r^2 - r^3 + \dots$$

In diesem Falle findet Aehnliches statt. Man erhält, indem man rechts ein Glied nach dem andern hinzunimmt, Werthe, die abwechselnd grösser und kleiner sind, als die linke Seite. Ist nun $r < 1$, so nehmen die Glieder an absoluter Grösse ab, und der Werth der linken Seite wird in immer engere Grenzen eingeschlossen; das Divisionsverfahren führt also, je länger man es fortsetzt, zu desto genaueren Werthen. — Ist $r = 1$, so bleiben die Grenzen, in die der Werth der linken Seite eingeschlossen ist, fortwährend dieselben, nämlich 0 und 1. Das Divisionsverfahren taugt also in diesem Falle nicht zur Bestimmung des Werthes der linken Seite. — Dasselbe ist der Fall, wenn $r > 1$ ist, weil dann die Grenzen, zwischen denen jener Werth liegt, sich unaufhörlich erweitern.

$$\frac{1}{0} = \infty; \quad \frac{1}{\infty} = 0. \quad 149.$$

Die zweite dieser Formeln geht auch aus Anm. zu 83a hervor. Multiplicirt man die erste dieser Formeln mit einer beliebigen Zahl a , so folgt:

$$\frac{a}{0} = \infty;$$

d. h.: Jede Division durch Null giebt ein unendlich grosses (also für weitere Rechnungen unbrauchbares) Resultat.

Multiplicirt man die Formel 7) mit a , so folgt:

$$8) \quad \frac{a}{1-q} = a + aq + aq^2 + \dots \quad 150.$$

Durch diese Formel ist auch die allgemeine geometrische Reihe 1) für den Fall einer unendlichen Gliederzahl summirt, immer unter der Voraussetzung, dass $q < 1$ ist.

(Aufgaben: Hofmann 3. Fünfzehnter Abschn. III. — Bardey XXXIII.)

Anm. Potenzreihen werden ihrer geringen Wichtigkeit wegen hier übergangen. Man untersuche ihre Bildungsgesetze und Eigenschaften auf dem bei den Summen- und Productreihen befolgten Wege, soweit die bisherigen Rechnungsregeln es gestatten.

E. Die Kettenbrüche.

I. Endliche Kettenbrüche.

144. *Vorbemerkung.* — Wenn bei Ausführung der Division zweier Zahlen nach Regel 88 der Divisor nicht ein Factor des Dividend ist, so bleibt (wie schon in der zu jener Regel führenden Betrachtung, S. 56, gesagt wurde) nach einer Reihe von Subtractionen ein undividirbarer Rest übrig, an dem man die Division nur andeuten kann. Setzt man das Verfahren in der bisherigen Weise fort, so erhält man als Resultat die unendliche Reihe. — Man kann jedoch die Rechnung auch in einer anderen Weise fortsetzen, die zu einem neuen Ausdruck, dem Kettenbruch führt.

Sei in dem eben erwähnten Divisionsverfahren r_0 der Rest, d der Divisor, also $r_0 < d$, so schreiben wir

$$\frac{r_0}{d} = \frac{1}{d|r_0}.$$

Dann liefert die Ausführung der Division $\frac{d}{r_0}$ wieder einen Quotienten q_1 und einen Rest r_1 , wobei $r_1 < r_0$, und es ist

$$\begin{array}{l}
 \frac{d}{r_0} = q_1 + \frac{r_1}{r_0} = q_1 + \frac{1}{r_0 | r_1} \\
 \text{Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhalten wir} \\
 \frac{r_0}{r_1} = q_2 + \frac{r_2}{r_1} = q_2 + \frac{1}{r_1 | r_2} \\
 \frac{r_1}{r_2} = q_3 + \frac{r_3}{r_2} = q_3 + \frac{1}{r_2 | r_3} \\
 \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \frac{d}{r_0} \\ \frac{r_0}{r_1} \\ \frac{r_1}{r_2} \end{array}} \right\} 1)$$

Wird endlich jeder rechts im Divisor stehende Quotient durch seinen aus der folgenden Formel hervorgehenden Werth ersetzt, so folgt:

$$2) \quad \frac{r_0}{d} = \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \dots}}}$$

wofür man der Raumersparniss wegen unter Benutzung des schrägen Divisionsstriches auch schreiben kann:

$$\frac{r_0}{d} = 1/\overline{q_1} + 1/\overline{q_2} + 1/\overline{q_3} + \dots$$

145. Erklärungen. — Ein Ausdruck von der Form $1/\overline{q_1} + 1/\overline{q_2} + \dots$ heisst Kettenbruch, die links von den Divisionsstrichen stehenden Zahlen 1 heissen seine Zähler, die rechts stehenden Zahlen $q_1, q_2, \dots$ seine Nenner. Der Ausdruck, durch dessen Entwicklung man den Kettenbruch erhält, heisst sein Werth.

Anm. Es wird hierbei vorausgesetzt, dass $q_1, q_2, \dots$ ganze positive Zahlen sind. Der Begriff des Kettenbruchs ist aber natürlich derselben Erweiterung fähig, wie derjenige der Zahl selbst. — Eine andere Erweiterung des Kettenbruch-Begriffes besteht darin, dass man als Zähler ebenso verschiedene Zahlen annimmt, wie als Nenner. Man kann dann den oben definirten Kettenbruch einen echten, einen Kettenbruch von der Form $d_1/\overline{q_1} + d_2/\overline{q_2} + \dots$ einen unechten nennen. — Endlich kann man, statt anzunehmen, dass jeder Nenner mit dem folgenden Zähler durch $+$ verbunden sei, auch annehmen, dass jeder Zähler mit dem folgenden Nenner durch $+$ verbunden sei. Man kann dann den oben definirten Kettenbruch einen absteigenden, und den eben beschriebenen einen aufsteigenden Kettenbruch nennen.

146. Verwandlung eines Quotienten in einen Kettenbruch. *)
 — Die Reihe von Divisionen, welche die Zahlen $q_1, q_2, q_3 \dots$

*) Beispiel s. am Schluss des Buches in der „Uebersicht der Formeln und Regeln“.

liefern, wird am besten nach folgendem Schema ausgeführt, welches sich auf die oben gegebenen Formeln gründet.

$$\begin{array}{r|l|l}
 r_0 & d & q_1 \\
 \hline
 r_0 q_1 & & \\
 r_1 & r_0 & q_2 \\
 \hline
 r_1 q_2 & & \\
 r_2 & r_1 & q_3 \\
 \hline
 r_2 q_3 & & \\
 \vdots & &
 \end{array}$$

Man dividirt d durch r_0 und erhält q_1 . Von d subtrahirt man das Product $r_0 q_1$ und erhält r_1 . Dann dividirt man r_0 durch r_1 und erhält q_2 . Von r_0 subtrahirt man das Product $r_1 q_2$ und erhält r_2 , u. s. w. 151.

Sind d und r_0 , wie wir hier annehmen, ganze Zahlen, so sind auch die Zahlen $q_1, q_2, \dots$ und $r_1, r_2, \dots$ ganze Zahlen. Da nun $r_0 > r_1 > r_2 \dots$, so muss schliesslich ein Rest $r_n = 0$ vorkommen. Da alsdann

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = q_n$$

ist, so ist q_n der letzte Nenner des Kettenbruchs, und die Rechnung ist beendet. Man nennt daher die aus der Entwicklung eines Quotienten hervorgehenden Kettenbrüche endliche.

147. *Verwandlung eines Kettenbruchs in einen Quotienten.* —

a) Durch Rückwärts-Rechnung. — Ist der Kettenbruch

$$1/\overline{q_1} + 1/\overline{q_2} + \dots + 1/\overline{q_{n-1}} + 1/\overline{q_n}$$

gegeben, so ist

$$q_{n-1} + 1/\overline{q_n} = \frac{q_{n-1} q_n + 1}{q_n}; \quad 1/\overline{q_{n-1}} + 1/\overline{q_n} = \frac{q_n}{q_{n-1} q_n + 1};$$

$$q_{n-2} + 1/\overline{q_{n-1}} + 1/\overline{q_n} = \frac{q_{n-2} q_{n-1} q_n + q_{n-2} + q_n}{q_{n-1} q_n + 1}$$

$$1/\overline{q_{n-2}} + 1/\overline{q_{n-1}} + 1/\overline{q_n} = \frac{q_{n-1} q_n + 1}{q_{n-2} q_{n-1} q_n + q_{n-2} + q_n}$$

u. s. w. — Hiernach erhält man für Kettenbrüche mit 1, 2, 3, 4 Nennern der Reihe nach die Werthe:

$$1/\overline{q_1} = \frac{1}{q_1};$$

$$1/\overline{q_1} + 1/\overline{q_2} = \frac{q_2}{q_1 q_2 + 1};$$

$$1/\overline{q_1} + 1/\overline{q_2} + 1/\overline{q_3} = \frac{q_2 q_3 + 1}{q_1 q_2 q_3 + q_1 + q_3};$$

$$1/\overline{q_1} + 1/\overline{q_2} + 1/\overline{q_3} + 1/\overline{q_4} = \frac{q_2 q_3 q_4 + q_2 + q_4}{q_1 q_2 q_3 q_4 + q_1 q_2 + q_1 q_4 + q_3 q_4 + 1}$$

Aus dem ersten dieser Werthe findet man den zweiten, indem man

$$\begin{aligned} 1 & \text{ durch } q_2 \\ q_1 & \text{ durch } q_1 q_2 + 1 \end{aligned}$$

ersetzt; aus dem zweiten den dritten, indem man

$$\begin{aligned} 1 & \text{ durch } q_3 \\ q_2 & \text{ durch } q_2 q_3 + 1 \end{aligned}$$

152. ersetzt. Allgemein aus dem p^{ten} den $p+1^{\text{ten}}$, indem man

$$\begin{aligned} 1 & \text{ durch } q_{p+1} \\ q_p & \text{ durch } q_p q_{p+1} + 1 \end{aligned}$$

ersetzt.

b) Durch Ausrechnung eines symbolischen Ausdrucks. — Die so eben erhaltenen Werthe der Kettenbrüche mit 1, 2, 3, 4 Nennern lassen sich alle durch folgende Regel finden:

153. Bezeichnet man mit $[q_1 q_2 q_3 \dots]$ die Summe der Ausdrücke, welche aus dem Producte $q_1 q_2 q_3 \dots$ dadurch hervorgehen, dass man auf alle möglichen Arten eine gerade Anzahl zusammenstehender Factoren weglässt, so ist der Kettenbruch, dessen Nenner $q_1 q_2 q_3 \dots$ sind, gleich dem Quotienten

$$\frac{[q_2 q_3 \dots]}{[q_1 q_2 q_3 \dots]}.$$

Anm. Für ein Product, aus welchem sämtliche Factoren weggelassen werden, ist 1 zu setzen. (Vgl. Anm. zu 77, und zur zweiten Erklärung auf S. 49.) — Als gerade Zahl gilt hier auch die Null.

Man kann hieraus auf die allgemeine Giltigkeit der Regel schliessen. Beweisen lässt sich dieselbe auf demselben Wege wie Formel 137.*)

*) Der etwas complicirte Beweis möge der Vollständigkeit wegen hier folgen. — Man kann alle in dem Ausdruck $[q_1 q_2 \dots q_{n-1} q_n]$ enthaltenen Glieder in 2 Gruppen bringen, deren eine $[q_1 q_2 \dots q_{n-1} q_n]$ alle Glieder umfasst, welche den letzten Factor q_n enthalten, während die andere $[q_1 q_2 \dots q_{n-2}]$ diejenigen Glieder enthält, welchen der letzte (und folglich auch der vorletzte) Factor fehlt. Dann ist also

$$[q_1 q_2 \dots q_n] = [q_1 q_2 \dots q_{n-1} q_n] + [q_1 q_2 \dots q_{n-2}].$$

Setzt man nun $q_n + 1/\overline{q_{n-1}}$ oder $\frac{q_n q_{n+1} + 1}{q_{n+1}}$ statt q_n , so folgt:

$$\begin{aligned} \left[q_1 q_2 \dots \frac{q_n q_{n+1} + 1}{q_{n+1}} \right] &= \left[q_1 q_2 \dots q_{n-1} \frac{q_n q_{n+1} + 1}{q_{n+1}} \right] + [q_1 q_2 \dots q_{n-2}] \\ &= \frac{1}{q_{n+1}} ([q_1 q_2 \dots q_{n-1} q_n q_{n+1}] + [q_1 q_2 \dots q_{n-1}] + [q_1 q_2 \dots q_{n-2} q_{n+1}]). \end{aligned}$$

Noch ist zu beachten, dass in der letzten Formel sowohl im Dividend wie im Divisor jeder Nenner oder Zähler des Kettenbruches nur in der ersten Potenz vorkommt. Setzt man daher aus den Gliedern des Zählers (oder Nenners) q_p als gemeinsamen Factor heraus, bezeichnet den Inhalt der Klammer mit a und die Summe der Glieder, welche q_p nicht enthalten, mit b , so hat der Zähler (oder Nenner) die Form 154.

$$aq_p + b \cdot 1.$$

c) Durch Determinanten. — Schafft man in den Gleichungen 1) die Nenner weg, so kann man sie in folgender Gestalt schreiben:

$$\begin{aligned} q_1 r_0 + r_1 &= d \\ -r_0 + q_2 r_1 + r_2 &= 0 \\ -r_1 + q_3 r_2 + r_3 &= 0 \\ -r_2 + q_4 r_3 + r_4 &= 0 \\ &\vdots \\ -r_{n-2} + q_n r_{n-1} &= 0. \end{aligned}$$

Man kann nun aus diesen n Gleichungen die Zahl $\frac{r_0}{d}$ nicht nur mittelst wiederholter Substitutionen, wie oben geschah, durch $q_1, q_2, \dots, q_n$ ausdrücken, sondern auch nach Regel 111 mittelst zweier Determinanten. Da das gegebene Gleichungs-

Die in der Klammer rechts stehende dreitheilige Summe ist nun gleich $[q_1 q_2 \dots q_{n+1}]$. Denn fassen wir die letzten beiden Factoren q_n und q_{n+1} dieses Ausdrucks in's Auge, so können aus demselben nur folgende Arten von Gliedern gebildet werden: 1) Solche, denen keiner dieser Factoren fehlt, d. h. die in $[q_1 q_2 \dots q_{n-1} \overline{q_n q_{n+1}}]$ enthaltenen Glieder. 2) Solche, denen q_{n+1} , und folglich auch q_n fehlt, d. h. die in $[q_1 q_2 \dots q_{n-1}]$ enthaltenen Glieder. 3) Solche, denen nicht q_{n+1} , wohl aber q_n , und folglich auch q_{n-1} fehlt, d. h. die in $[q_1 q_2 \dots q_{n-2} q_{n+1}]$ enthaltenen Glieder. — Demnach ist

$$\left[q_1 q_2 \dots \frac{q_n q_{n+1} + 1}{q_{n+1}} \right] = \frac{1}{q_{n+1}} [q_1 q_2 \dots q_{n+1}].$$

Ebenso:

$$\left[q_2 q_3 \dots \frac{q_n q_{n+1} + 1}{q_{n+1}} \right] = \frac{1}{q_{n+1}} [q_2 q_3 \dots q_{n+1}];$$

folglich durch Division:

$$\frac{\left[q_2 q_3 \dots \frac{q_n q_{n+1} + 1}{q_{n+1}} \right]}{\left[q_1 q_2 \dots \frac{q_n q_{n+1} + 1}{q_{n+1}} \right]} = \frac{[q_2 q_3 \dots q_{n+1}]}{[q_1 q_2 \dots q_{n+1}]}.$$

Demnach gilt die Regel, wenn sie bis q_n richtig ist, auch noch bis q_{n+1} , folglich, da sie für $n = 1, 2, 3, 4$ gilt, allgemein.

system hier n Gleichungen mit den n Unbekannten $r_0, r_1, \dots, r_{n-1}$ enthält, deren Coefficienten grossentheils gleich Null sind, so hat man nach jener Regel (die Division durch den Doppelpunkt angedeutet):

$$155. \quad r_0 = \left| \begin{array}{ccccccccc} d & 1 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 1 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & -1 & q_3 & 1 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & q_4 & 1 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & q_5 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & q_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & q_n \end{array} \right| : \left| \begin{array}{ccccccccc} q_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ -1 & q_2 & 1 & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & -1 & q_3 & 1 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & q_4 & 1 & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & q_5 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & q_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & q_n \end{array} \right|$$

Hieraus erhält man $\frac{r_0}{d}$, wenn man in der ersten Determinante

1 statt d setzt. Es ist also der aus $\frac{r_0}{d}$ sich ergebende Kettenbruch hierdurch als Quotient zweier Determinanten dargestellt.

(Aufgaben: Hofmann 2. Achter Abschn. I. — Bardey XX. 22—51).

148. Näherungsbrüche eines Kettenbruches. — Unter dem n^{ten} Näherungsbrüche eines Kettenbruches, dessen Nenner $q_1, q_2, q_3 \dots$ sind, versteht man denjenigen Theil des gegebenen Kettenbruches, welcher als ersten Nenner q_1 , als letzten q_n hat. Der übrige Theil des gegebenen Kettenbruches heisst der n^{te} Kettenrest. — Der Werth des n^{ten} Näherungsbruches heisst der n^{te} Näherungswerth des gegebenen Kettenbruches. Die Näherungswerthe eines Kettenbruches lassen sich auf dieselbe Weise bestimmen und darstellen wie der Werth des Kettenbruches selbst.

149. Eigenschaften der Näherungswerthe. — 1) Ist

$$\frac{x_n}{y_n} = 1/\overline{q_1} + 1/\overline{q_2} + \dots + 1/\overline{q_{n-1}} + 1/\overline{q}$$

der gegebene Kettenbruch, so sind seine successiven Näherungsbrüche:

$$\frac{x_1}{y_1} = 1/\overline{q_1}; \quad \frac{x_2}{y_2} = 1/\overline{q_1} + 1/\overline{q_2}; \quad \frac{x_3}{y_3} = 1/\overline{q_1} + 1/\overline{q_2} + 1/\overline{q_3}; \quad \dots$$

Der n^{te} (letzte) Näherungsbruch ist der Kettenbruch selbst.

Sind $z_1, z_2, \dots$ die successiven Kettenreste, so ist

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{q_1 + z_1}; \quad z_1 = \frac{1}{q_2 + z_2}; \quad z_2 = \frac{1}{q_3 + z_3}; \quad \dots \quad z_{n-1} = \frac{1}{q_n}; \quad z_n = 0;$$

und es verwandelt sich $\frac{x_n}{y_n}$ in $\frac{x_p}{y_p}$, sobald man die Reihe dieser Formeln durch Weglassung von z_p schliesst.

Lässt man nun z_1 weg, so wird (nach Anm. zu 83a)

$$\frac{x_1}{y_1} > \frac{x_n}{y_n} \text{ sein.}$$

Lässt man z_2 weg, so wird z_1 grösser, also ist $\frac{x_2}{y_2} < \frac{x_n}{y_n}$.

Lässt man z_3 weg, so wird z_2 grösser, z_1 kleiner, also ist $\frac{x_3}{y_3} > \frac{x_n}{y_n}$.

Lässt man z_p weg, so wird hiernach $\frac{x_p}{y_p} \gtrless \frac{x_n}{y_n}$ sein, je nachdem p eine ungerade oder gerade Zahl ist. Es folgt also die Regel:

Die successiven Näherungswerthe eines Ketten- 156.
bruches sind abwechselnd grösser und kleiner als der Werth des Kettenbruches, und zwar sind diejenigen von ungerader Ordnung (der 1^{te}, 3^{te} . . .) grösser, diejenigen von gerader Ordnung (der 2^{te}, 4^{te} . . .) kleiner.

2) Sei x_p der Zähler oder Nenner des p^{ten} Näherungswerthes, so ist derselbe nach 154 von der Form

$$x_p = a \cdot q_p + b \cdot 1.$$

Nun erhält man nach 152 x_{p+1} aus x_p , indem man 1 in q_{p+1} und q_p in $q_p q_{p+1} + 1$ übergehen lässt. Also ist

$$x_{p+1} = a q_p q_{p+1} + a \cdot 1 + b \cdot q_{p+1} = (a q_p + b) q_{p+1} + a \cdot 1 = x_p q_{p+1} + a \cdot 1.$$

Ebenso

$$x_{p+2} = x_p (q_{p+1} q_{p+2} + 1) + a q_{p+2} = (x_p q_{p+1} + a) q_{p+2} + x_p \cdot 1 = x_{p+1} q_{p+2} + x_p \cdot 1.$$

Demnach besteht zwischen den Zählern wie zwischen 157.
den Nennern von drei auf einander folgenden Näherungswerthen, wenn der letzte Näherungsbruch mit q_{p+2} schliesst, die Beziehung:

$$x_{p+2} = x_{p+1} q_{p+2} + x_p \cdot 1.$$

3) Ist q_{p+2} überhaupt der letzte Nenner des Kettenbruches, so ist $\frac{x_{p+2}}{y_{p+2}}$ der Werth des Kettenbruches. Setzen

wir $p + 2 = n$, so sind $\frac{x_{n-1}}{y_{n-1}}$ und $\frac{x_{n-2}}{y_{n-2}}$ die vorhergehenden Näherungswerthe, und man hat:

$$158. \quad \frac{x_n}{y_n} = \frac{x_{n-1}q_n + x_{n-2} \cdot 1}{y_{n-1}q_n + y_{n-2} \cdot 1}.$$

4) Die Differenz der ersten beiden Näherungswerthe

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{1}{q_1}; \quad \frac{x_2}{y_2} = \frac{q_2}{q_1q_2 + 1}$$

ist:

$$\frac{x_1}{y_1} - \frac{x_2}{y_2} = \frac{q_1q_2 + 1 - q_1q_2}{q_1(q_1q_2 + 1)} = \frac{+1}{y_1y_2};$$

die des zweiten und dritten:

$$\frac{x_2}{y_2} = \frac{q_2}{q_1q_2 + 1}; \quad \frac{x_3}{y_3} = \frac{q_2q_3 + 1}{q_1q_2q_3 + q_1 + q_3};$$

$$\frac{x_2}{y_2} - \frac{x_3}{y_3} = \frac{q_1q_2^2q_3 + q_1q_2 + q_2q_3 - q_1q_2^2q_3 - q_2q_3 - q_1q_2 - 1}{(q_1q_2 + 1)(q_1q_2q_3 + q_1 + q_3)} = \frac{-1}{y_2y_3}.$$

Allgemein wird gelten:

$$159. \quad \frac{x_{p-1}}{y_{p-1}} - \frac{x_p}{y_p} = (-1)^p \cdot \frac{1}{y_{p-1}y_p},$$

wenn diese Formel auch für die Differenz des p^{ten} und $(p+1)^{\text{ten}}$ Näherungswerthes gilt. Nun ist

$$\frac{x_p}{y_p} - \frac{x_{p+1}}{y_{p+1}} = \frac{x_py_{p+1} - y_px_{p+1}}{y_py_{p+1}}.$$

Hierin ist der Dividend (nach 157)

$$\begin{aligned} x_py_{p+1} - y_px_{p+1} &= x_p(y_pq_{p+1} + y_{p-1}) - y_p(x_pq_{p+1} + x_{p-1}) \\ &= x_py_{p-1} - y_px_{p-1} = (-1)(x_{p-1}y_p - x_py_{p-1}). \end{aligned}$$

Nun ist aber nach Annahme

$$x_{p-1}y_p - x_py_{p-1} = (-1)^p;$$

also

$$\frac{x_p}{y_p} - \frac{x_{p+1}}{y_{p+1}} = \frac{(-1)^{p+1}}{y_py_{p+1}};$$

d. h.: Formel 159 gilt auch noch, wenn man $p+1$ für p setzt. Nun gilt sie für $p=2$ und $p=3$, also allgemein.

Anm. Da nach 156 der Werth des Kettenbruches zwischen je zwei successiven Näherungswerthen liegt, so ist jeder Näherungswerth von dem folgenden um mehr verschieden, als von dem Werth des Kettenbruchs.

Mithin beträgt der letztere Unterschied weniger als $\frac{1}{y_py_{p+1}}$. Da nun,

wie aus 157 hervorgeht, die Zähler wie die Nenner der successiven Näherungswerthe immer grösser werden, so wird $\frac{1}{y_py_{p+1}}$ immer kleiner; d. h.:

die successiven Näherungswerthe nähern sich immer mehr dem Werthe des Kettenbruches. (Daher der Name „Näherungsbruch“.)

Sei $u < x_{p+1}$; $v < y_{p+1}$, so ist $\frac{x_p}{y_p} - \frac{u}{v} = \frac{v \cdot x_p - u \cdot y_p}{v \cdot y_p}$. Der kleinste

Werth, den der Zähler haben kann, wenn $\frac{u}{v}$ von $\frac{x_p}{y_p}$ verschieden sein soll, ist 1. Der Nenner $v \cdot y_p$ ist $< y_{p+1} y_p$; also der ganze Bruch jedenfalls grösser als $\frac{1}{y_p y_{p+1}}$; d. h.: Jeder in kleineren Zahlen als ein 160.

Näherungswerth ausgedrückte Bruch ist von dem Werthe des Kettenbruches um mehr verschieden als dieser Näherungswerth.

150. Diophantische Gleichungen. *) — 1) Betrachten wir in der Formel 159 x_p und y_p als unbekannte, x_{p+1} und y_{p+1} als bekannte Zahlen, schreiben ferner zur Abkürzung

$$\begin{array}{cccc} x & y & a & b \\ \text{statt} & x_p & y_p & y_{p+1} \end{array} \quad x_{p+1},$$

und beseitigen die Nenner, so folgt:

$$1) \quad ax - by = \pm 1.$$

Da a, b, x, y ganze Zahlen sind, also auch bei Auflösung dieser Gleichung die Bedingung hinzutritt, dass x und y ganze Zahlen sein sollen, so erkennen wir in derselben eine diophantische Gleichung (vgl. S. 68), und da $\frac{x}{y}$ der vorletzte Näherungs-

werth von $\frac{b}{a}$ ist, so ergibt sich zur Auflösung der Gleichung

1) in ganzen Zahlen die Regel:

Man bestimme den vorletzten Näherungswerth 161.

$\frac{b_1}{a_1}$ des Quotienten $\frac{b}{a}$, und setze $x = \pm b_1$, $y = \pm a$, wobei die Vorzeichen von x und y dem der rechten Seite von 1) gleich sind, wenn der Näherungswerth von ungerader, dagegen entgegengesetzt sind, wenn er von gerader Ordnung ist.

2) Multiplicirt man die Gleichung 1) mit $\pm c$, so folgt:

$$a(\pm cx) \pm b(\mp cy) = c,$$

oder, wenn wir

$$\pm cx = u; \quad \mp cy = v$$

setzen:

$$2) \quad au \pm bv = c.$$

*) Beispiele am Schluss des Buches in der „Uebersicht der Formeln und Regeln“. — Diophantus, alexandrinischer Mathematiker, im vierten Jahrhundert n. Chr.

Für die Lösung der allgemeinen diophantischen Gleichung 2) ergibt sich hiernach folgende Regel:

162. Man bestimme den vorletzten Näherungswerth $\frac{x}{y}$ des Quotienten $\frac{a}{b}$, und setze $u = \pm cx$, $v = \mp cy$, wobei die oberen oder unteren Zeichen zu wählen sind, je nachdem der Näherungswerth von ungerader oder gerader Ordnung ist.

Sei u_1 und v_1 ein zweites Paar von Werthen, welches der Gleichung 2) genügt, so soll sein

$$au_1 + bv_1 = c,$$

mithin durch Subtraction dieser Gleichung von 2)

$$a(u - u_1) + b(v - v_1) = 0,$$

oder:

$$\frac{u - u_1}{v - v_1} = -\frac{b}{a}.$$

Da hier alle Buchstaben ganze Zahlen bedeuten, und a und b keinen gemeinsamen Factor haben (denn sonst hätte ihn auch c , und man würde die ganze Gleichung durch ihn dividirt haben), so muss $u - u_1$ dasselbe Vielfache von $-b$ sein, wie $v - v_1$ von $+a$. Sei dieses Vielfache mit n bezeichnet, so ist hiernach

$$u - u_1 = -nb, \quad v - v_1 = na;$$

oder:

$$163. \quad u_1 = u + nb; \quad v_1 = v - na.$$

Diese Formeln lehren alle ganzzahligen Werthe von u und v aus einem Paare derselben finden, indem aus jedem ganzzahligen (positiven oder negativen) Werthe von n ein Werthepaar für u und v hervorgeht.

Anm. Ist b negativ, so setzt man $-v = +w$ und bestimmt zunächst w .

(Aufgaben: Hofmann 2. Achter Absch. II. — Bardey XXXI.)

II. Unendliche Kettenbrüche.

151. Vorbemerkung. — Ebenso wie die Division liefert auch die Radicirung mit 2 (nach Regel 90) eine unendliche Reihe, wenn der Radicand nicht genau die zweite Potenz einer Zahl ist. Aber auch in diesem Falle lässt sich die Rechnung so führen, dass das Resultat ein Kettenbruch wird. Derselbe muss aber ein unendlicher sein, weil er sich sonst genau durch einen Quotienten darstellen liesse, was der Natur der irrationalen Wurzeln widerspricht. (S. 51.)

152. Darstellungen der Wurzel einer quadratischen Gleichung als Kettenbruch.*) — 1) Es sei die Gleichung

$$y^2 + 2by = c$$

gegeben. Ihre Wurzeln sind bestimmt durch den Ausdruck

$$y = -b \pm \sqrt{b^2 + c},$$

oder, wenn wir

$$b^2 + c = a$$

setzen:

$$y = -b \pm \sqrt{a}.$$

Andrerseits ist

$$y(y + 2b) = c,$$

oder:

$$y = \frac{c}{2b + y} = \frac{c}{2b + \frac{c}{2b + y}},$$

da man für y rechts den Werth $\frac{c}{2b + y}$ einsetzen kann. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens, welches offenbar ins Unendliche wiederholt werden kann, erhält man den unendlichen Kettenbruch

$$y = c/2b + c/2b + \dots$$

und

$$\sqrt{a} = b + c/2b + c/2b + \dots$$

Der hier erhaltene Kettenbruch ist (vgl. Anm. auf S. 112) ein unechter. Er wird ferner „periodisch“ genannt, weil der Nenner $2b$ unaufhörlich wiederkehrt. Allgemein heisst ein Kettenbruch periodisch, wenn eine Reihe von Nennern beständig in derselben Reihenfolge wiederkehrt. Die sich wiederholende Reihe heisst Periode.

2) Man setzt, um $\sqrt{a}$ zu entwickeln:

$$\sqrt{a} = e_0 + \frac{1}{c_0};$$

$$\frac{1}{c_0} = \sqrt{a} - e_0;$$

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{a} - e_0} = \frac{\sqrt{a} + e_0}{a - e_0^2} = \frac{\sqrt{a} + e_0}{d_0} = b_1 + \frac{1}{c_1}; \quad (a - e_0^2 = d_0.)$$

$$\frac{1}{c_1} = \frac{\sqrt{a} + e_0 - b_1 d_0}{d_0} = \frac{\sqrt{a} - e_1}{d_0}; \quad (b_1 d_0 - e_0 = e_1.)$$

*) Beispiele zu dieser und der folgenden Nr. s. am Schluss des Buches in der „Uebersicht der Formeln und Regeln“.

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \frac{d_0}{\sqrt{a-e_1}} = \frac{d_0(\sqrt{a+e_1})}{a-e_1^2} = \frac{\sqrt{a+e_1}}{d_1} = b_2 + \frac{1}{c_2}; & \left(\frac{a-e_1^2}{d_0} = d_1. \right) \\
 \frac{1}{c_2} &= \frac{\sqrt{a+e_1} - b_2 d_1}{d_1} = \frac{\sqrt{a-e_2}}{d_1}; & (b_2 d_1 - e_1 = e_2.) \\
 c_2 &= \frac{d_1}{\sqrt{a-e_2}} = \frac{d_1(\sqrt{a+e_2})}{a-e_2^2} = \frac{\sqrt{a+e_2}}{d_2} = b_3 + \frac{1}{c_3}; & \left(\frac{a-e_2^2}{d_1} = d_2. \right) \\
 &\dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

Hierbei sind $e_0, b_1, b_2 \dots$ die grössten in dem links daneben stehenden Ausdruck enthaltenen ganzen Zahlen. Durch Elimination von $e_0, c_1, e_2 \dots$ erhält man aus diesen Gleichungen:

$$\sqrt{a} = e_0 + 1/\bar{b}_1 + 1/\bar{b}_2 + 1/\bar{b}_3 + \dots;$$

also ist die Wurzel als unendlicher echter Kettenbruch dargestellt.

Anm. Da $\frac{a-e_1^2}{d_0} = \frac{a-(b_1^2 d_0^2 - 2b_1 d_0 e_0 + e_0^2)}{d_0} = \frac{a-e_0^2}{d_0} + 2b_1 e_0 - b_1^2 d_0 = 1 + 2b_1 e_0 - b_1^2 d_0$ ist, so ist d_1 stets eine ganze Zahl. Dasselbe gilt von $d_2, d_3 \dots$ — Da ferner (wie aus der Formel für $\frac{1}{c_1}$ folgt) $\frac{\sqrt{a}}{d_0} > \frac{1}{c_1}$ oder $\sqrt{a} > \frac{d_0}{c_1}$, d. h. $\sqrt{a} - \frac{d_0}{c_1} > 0$ ist, und da (wie aus der Formel für c_0 folgt) $\sqrt{a} + e_0 = b_1 d_0 + \frac{d_0}{c_1}$ oder $\sqrt{a} - \frac{d_0}{c_1} = b_1 d_0 - e_0$ ist, so ist auch $b_1 d_0 - e_0 > 0$, d. h. e_1 positiv, und ebenso $e_2, e_3 \dots$ — Hieraus folgt weiter, dass nur so viele verschiedene Zahlen e vorkommen können, als die Zahl e_0 angiebt. Denn $\sqrt{a} - e_1, \sqrt{a} - e_2, \dots$ sind ebenfalls positive Zahlen. Ist nun $e_p = e_0$, so ist $d_p = d_0$ (nach der Formel $d_0 = \frac{a-e_0^2}{c_0}$); $c_p = c_0$ (da $c_0 = \frac{\sqrt{a}+e_0}{d_0}$); $b_{p+1} = b_1$; $c_{p+1} = c_1$; $e_{p+1} = e_1$ u. s. w. Von da an wiederholen sich also die Nenner des Kettenbruches in derselben Reihenfolge; d. h. der Kettenbruch ist periodisch.

(Aufgaben: Bardey XX. 52—62.)

153. Verwandlung eines periodischen Kettenbruches in einen irrationalen Ausdruck. — Sei

$$x = 1/\bar{q}_1 + 1/\bar{q}_2 + \dots + 1/\bar{q}_n \dots$$

der Inbegriff der periodisch wiederkehrenden Nenner, so ist offenbar

$$x = 1/\bar{q}_1 + 1/\bar{q}_2 + \dots + 1/\bar{q}_n + x.$$

Verwandelt man durch Rückwärtsrechnung die rechte Seite dieser Gleichung in einen Quotienten, so erhält man eine gemischt-quadratische Gleichung, aus der sich x bestimmen lässt.

Anm. Diese Methode ist auch auf unechte Kettenbrüche anwendbar, sowie auf solche, in denen vor den periodischen Nennern noch eine Reihe solcher steht, die sich nicht wiederholen.

Angewandte Arithmetik.

I. Die Decimalrechnung.

1. Ganze Decimalzahlen.

154. Vorbemerkung. — Zur Darstellung jeder natürlichen Zahl würde ein besonderes Zeichen (Ziffer) erforderlich sein, wenn es nicht gelänge, eine beschränkte Anzahl von Zeichen so zusammenzustellen, dass jede natürliche Zahl durch eine derartige Zusammenstellung ausgedrückt werden kann. Wie dies möglich ist, soll im Folgenden gezeigt werden.

Sei x eine bestimmte positive ganze Zahl, und $a, b, c, \dots$ ebenfalls ganze positive Zahlen, die nur der Bedingung unterworfen sind, dass sie $< x$ sein müssen, übrigens aber alle Werthe von 0 bis $x - 1$ annehmen können. Dann ist

$$\begin{aligned} a &< x; \\ a + bx &< x^2; \\ a + bx + cx^2 &< x^3; \\ . & \end{aligned}$$

wie sogleich ersichtlich ist, wenn man $a, b, c, \dots$ durch den höchsten für diese Zahlen möglichen Werth $x - 1$ ersetzt.

Es kann ferner jede Zahl, die $< x$ ist, durch a , jede, die $< x^2$ ist, durch $a + bx$, jede, die $< x^n$ ist, durch $a + bx + \dots + kx^{n-1}$ ausgedrückt werden, d. h.: durch ein nach Potenzen von x geordnetes Polynom.

Dieses Polynom lässt sich abgekürzt schreiben. Da nämlich die erste Zahl, a , mit x^0 , die zweite, b , mit x^1 , die n^{te} , k , mit x^{n-1} multiplicirt ist, so zeigt jede Zahl schon durch ihre Stelle an, mit welcher Potenz von x sie zu multipliciren ist; diese Potenzen können also fortgelassen werden. Da ferner alle Glieder des Polynoms durch $+$ verbunden sind, so kann man auch diese Zeichen weglassen, und das Polynom in einer der Formen

$$abc \dots hik \text{ oder } kih \dots cba$$

schreiben, je nachdem es nach steigenden oder fallenden Potenzen von x geordnet werden soll.

Es ist hieraus ersichtlich, dass, wenn man für jede der x Zahlen $0, 1, \dots (x - 1)$ ein besonderes Zeichen festsetzt, man mit Hilfe dieser Zeichen jede noch so grosse Zahl mit Ausnahme der Potenzen von x darstellen kann.

Aber auch für diese letzteren Zahlen bedarf man keines neuen Zeichens. Denn setzt man in $(a + bx)$ $a = 0, b = 1$, so ist $a + bx = x$, oder nach der zweiten der obigen Schreibweisen

$$x = 10.$$

Setzt man in $(a + bx + cx^2)$ $a = 0, b = 0, c = 1$, so ist $a + bx + cx^2 = x^2$, oder

$$x^2 = 100, \text{ u. s. w.}$$

Es genügen also die Zeichen für $0, 1, \dots (x - 1)$ zur Darstellung aller ganzen positiven Zahlen ohne Ausnahme.

Der Inbegriff aller Zahlen, die als Polynome mit derselben Grundzahl dargestellt sind, heisst ein Zahlssystem.

Anm. Die Zahl, welche als Grundzahl eines Zahlsystems dienen soll, darf nicht zu gross sein, weil sonst die Anzahl der nöthigen Zahlzeichen zu gross wäre, aber auch nicht zu klein, weil sonst zum Schreiben einer Zahl zu viele Zeichen erforderlich wären. Sie muss ferner möglichst viele ganze Zahlen als Factoren enthalten, und besonders durch Potenzen von 2 theilbar sein, weil die Theilung in zwei gleiche Theile in allen Anwendungen auf wirkliche Verhältnisse am häufigsten vorkommt und am leichtesten durchführbar ist. In dieser Hinsicht würde die Zahl Zwölf, deren Vortheile von jeher in den Masszahlen der Zeit, des Geldes, der Strecken und Winkel verwerthet worden sind, den Vorzug vor der allgemein gebräuchlichen Systemzahl Zehn verdienen, die nur zwei Factoren enthält, und nur durch die erste Potenz von 2 theilbar ist. Da es aber unmöglich ist, diese Systemzahl aufzugeben, so hat man in neuerer Zeit die Masszahlen soviel wie möglich mit ihr in Uebereinstimmung gebracht, und dadurch eine Vereinfachung der Rechnungen erzielt, welche die Vortheile der früheren Masszahlen aufwiegt.

155. Erklärungen. — Jede ganze Zahl, die als ein nach fallenden Potenzen von Zehn geordnetes Polynom geschrieben ist, heisst Decimalzahl. Die Zahlzeichen $0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$, mittelst welcher die Decimalzahlen geschrieben werden, heissen Ziffern, und die Ziffern als Bestandtheile der Decimalzahl Stellen. (Benennung der Stellen! Abtheilen grosser Zahlen von rechts nach links in Klassen zu je 6 Stellen!)

156. Rechnungen mit Decimalzahlen. — Mit Decimalzahlen wird ebenso gerechnet wie mit Polynomen; nur wird jeder durch Vereinigung zweier Ziffern entstandene Coefficient, sobald er ≥ 10 ist, in die Form $10a + b$ gebracht, und a mit

dem nächst höheren Gliede des Polynoms vereinigt. — Die Rechnungen mit Decimalzahlen sind daher auch äusserlich denjenigen mit Polynomen ganz ähnlich. Zu beachten sind folgende leicht abzuleitende Regeln über den Gebrauch 164. der Null:

1) Links von den Ziffern der Decimalzahl können Nullen beliebig gesetzt und weggelassen werden.

2) Eine Decimalzahl wird mit 10^n multiplicirt, indem man rechts n Nullen hinzufügt.

Anm. Welche Abkürzungen finden statt, wenn man die Regeln der Rechnung mit Polynomen auf die Rechnung mit Decimalzahlen anwendet? Wie ist das „Borgen“ bei der Subtraction zu begründen? Bei der Radicirung mit 2 enthält das erste Glied eine oder zwei Stellen, je nachdem die Stellenzahl des Radicanden ungerade oder gerade ist. Denn im zweiten Falle gehört zur ersten Ziffer eine ungerade Potenz von 10, aus der die Quadratwurzel nicht rational bestimmt werden kann. Man fasst also z. B. die beiden ersten Glieder $ax^7 + bx^6$ zu dem Gliede $(ax + b)x^6$ zusammen, und zerlegt dasselbe, wenn c^2 die nächste unter $ax + b$ liegende Quadratzahl ist, in die Glieder c^2x^6 und $(ax + b - c^2)x^6$.

Durch die Regeln, welche sich für Decimalzahlen aus den Gesetzen der Polynome ergeben, wird jede Vereinigung von Decimalzahlen auf Vereinigungen zwischen den Zahlen von 0 bis 9 zurückgeführt. Man braucht also nur die letzteren zu kennen (das „Eins und Eins“, das „Einsmaleins“, beide mit ihren Umkehrungen, und die Quadratzahlen von 1 bis 100) um mit Hilfe dieser Regeln beliebige Decimalzahlen addiren, subtrahiren, multipliciren und dividiren, sowie eine solche Zahl mit 2 radiciren zu können. (Beispiel für letztere Rechnung s. am Schluss des Buches.)

(Aufgaben: Hofmann 1. Erste Abth. I. V. Anhang I.)

157. Anwendungen der Kettenbrüche auf Decimalzahlen und Gleichungen.*)

1) Bestimmung des grössten gemeinsamen Factors zweier Decimalzahlen. — Schreibt man die Gleichungen 1) S. 112 in der Form

$$\begin{aligned} d &= q_1 r_0 + r_1 \\ r_0 &= q_2 r_1 + r_2 \\ r_1 &= q_3 r_2 + r_3 \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ r_{n-3} &= q_{n-1} r_{n-2} + r_{n-1} \\ r_{n-2} &= q_n r_{n-1}, \end{aligned}$$

so lehrt die erste Gleichung: Jeder gemeinsame Factor der Zahlen d und r_0 ist auch Factor von r_1 ; die zweite: Derselbe

*) Beispiele s. am Schluss des Buches in der „Uebersicht der Formeln und Regeln“.

Factor ist (weil er Factor von r_0 und r_1 ist) auch Factor von r_2 , u. s. w., endlich auch von r_{n-1} . Andererseits lehrt die letzte Gleichung: r_{n-1} ist Factor von r_{n-2} ; die vorletzte: r_{n-1} ist gemeinsamer Factor von r_{n-2} und r_{n-3} , u. s. w.; endlich auch von d und r_0 . — Da nun jeder gemeinsame Factor von d und r_0 ein Factor von r_{n-1} , und r_{n-1} gemeinsamer Factor von d und r_0 ist, so ist r_{n-1} der grösste gemeinsame Factor von d und r_0 . — Wendet man also auf die Zahlen d und r_0 das in Regel 151 beschriebene Verfahren an, so ist der letzte Divisor der grösste gemeinsame Factor von d und r_0 . (Aufgaben: Hofmann 1. Erste Abtheilung III.)

2) Elimination einer Unbekannten aus zwei Gleichungen beliebigen Grades. — Wenn in den obigen Gleichungen die Buchstaben d und r_0 die linken Seiten zweier Gleichungen höheren Grades (mit beliebig vielen Unbekannten) bedeuten, die nach Potenzen der Unbekannten x geordnet sind, so muss, wenn x_1 ein Werth von x ist, der beiden Gleichungen genügt, $(x - x_1)$ gemeinsamer Factor von r_0 und d sein. (Vgl. Anm. am Schluss von Nr. 118). Dividirt man nun das Polynom d durch r_0 (unter der Voraussetzung, dass der Grad von d grösser oder gleich dem von r_0 ist), bis zu einem Reste r_1 , dessen Grad niedriger ist, als der von r_0 , und setzt dieses Verfahren (nach Regel 151) in derselben Weise fort, so gelangt man schliesslich zu einem Restpolynom r_{n-1} , welches x nicht mehr enthält, also auch den Factor $(x - x_1)$ nicht enthalten kann. Da aber r_{n-2} und r_{n-3} diesen Factor enthalten, so muss, wie aus der Gleichung $r_{n-3} = q_{n-1}r_{n-2} + r_{n-1}$ folgt, $r_{n-1} = 0$ sein. Die Gleichung $r_{n-1} = 0$ ist also eine Folge der Gleichungen $r_{n-2} = 0$, $r_{n-3} = 0$, ... $r_0 = 0$, $d = 0$, und da alle diese Gleichungen durch den Werth $x = x_1$ erfüllt werden, so ist $r_{n-1} = 0$ das Resultat der Elimination von x zwischen den Gleichungen $r_0 = 0$ und $d = 0$.

Anm. Durch wiederholte Anwendung dieser Methode lassen sich schliesslich n höhere Gleichungen mit n Unbekannten auf eine Gleichung mit einer Unbekannten reduciren.

2. Decimalbrüche.

158. *Vorbemerkung.* — Ebenso wie bei den Polynomen liefert auch bei den Decimalzahlen die Division und die Radicirung nicht immer ein abgeschlossenes Resultat. Es bleibt dann ein Rest, an welchem man das bisher befolgte Verfahren fortsetzen kann. Für diesen Zweck muss aber der Begriff der

Decimalzahl ebenso erweitert werden, wie früher der des Polynoms; denn es kommt jetzt darauf an, Brüche (vgl. Anm. zu 83a) und irrationale Zahlen ebenso in Form der Decimalzahlen darzustellen, wie bisher die ganzen Zahlen.

Wir bemerken zu diesem Zweck, dass, wenn die Division zweier nach fallenden Potenzen von x geordneten Polynome auf ein Polynom geführt hat, dessen Endglieder $cx^2 + bx + a$ sind, die Fortsetzung des Divisionsverfahrens an dem Reste ein Polynom von der Form

$$\frac{b_1}{x} + \frac{c_1}{x^2} + \dots$$

oder $b_1 x^{-1} + c_1 x^{-2} + \dots$

liefert. — Dasselbe findet statt bei der Radicirung eines Polynoms mit 2.

Man braucht hiernach, um die ferneren Glieder des Resultates durch eine Decimalzahl auszudrücken, nur die Bildung der Stellen nach rechts fortzusetzen. Das Gesamtergebn ist dann immer noch nach fallenden Potenzen von x (10) geordnet, und während die Exponenten von 10 in dem ganzzahligen Theile der Decimalzahl positiv sind, sind sie in dem Bruchtheile negativ.

159. Erklärungen. — Jede gebrochene oder irrationale Zahl, die als ein nach fallenden Potenzen von Zehn geordnetes Polynom geschrieben ist, heisst Decimalbruch. Die Stellen, zu welchen Potenzen von Zehn mit negativen Exponenten gehören, heissen Decimalstellen, diejenigen, für welche die Exponenten positiv sind, ganze Stellen. Die ganzen Stellen werden von den Decimalstellen durch ein Komma getrennt. — Die allgemeine Form eines Decimalbruches ist hiernach in nicht abgekürzter Bezeichnung (wobei x die Zahl Zehn bedeutet):

$$\dots cx^2 + bx + a + b_1 x^{-1} + c_1 x^{-2} + \dots,$$

oder in abgekürzter Bezeichnung

$$\dots cba, b_1 c_1 \dots$$

Anm. Man erhält hiernach den Werth der n^{ten} Stelle links vom Komma (der n^{ten} ganzen Stelle), wenn man ihre Ziffer mit 10^{n-1} , und denjenigen der n^{ten} Stelle rechts vom Komma (der n^{ten} Decimalstelle), wenn man ihre Ziffer mit 10^{-n} multiplicirt. — Ist $a = b = c = \dots = 0$, so wird der Decimalbruch geschrieben $0, b_1 c_1 \dots$

Wenn man die Decimalstellen

$$b_1 x^{-1} + c_1 x^{-2} + \dots + k_1 x^{-n}$$

mit x^n multiplicirt und dividirt, so erhält man:

$$\frac{b_1 x^{n-1} + c_1 x^{n-2} + \dots + k_1}{x^n};$$

165. d. h.: Der Werth der Decimalstellen ist einem Quotienten gleich, dessen Dividend die als ganze Zahl betrachteten Decimalstellen bilden, während der Divisor aus einer Eins mit ebensovielen Nullen besteht.

160. Rechnungen mit Decimalbrüchen. — Mit Decimalbrüchen wird gerechnet wie mit Decimalzahlen; nur die Stelle, welche das Komma im Resultat erhält, bedarf einer Bestimmung durch besondere Regeln. — Fürs Erste sind wichtig folgende leicht abzuleitende Regeln über den Gebrauch der Null:

1) Links von den ganzen und rechts von den Decimalstellen können Nullen beliebig gesetzt und weggelassen werden.

2) Ein Decimalbruch wird mit 10^n multiplicirt oder dividirt, indem man das Komma um n Stellen nach rechts oder links rückt.

Anm. Wann geht beim Multipliciren der Decimalbruch in eine ganze Zahl über? Wie kann man eine ganze Zahl als Decimalbruch schreiben? Wie eine ganze Zahl mittelst des Kommas durch 10^n dividiren?

Addition und Subtraction. — Durch Hinzufügen von Nullen auf der rechten Seite kann man bewirken, dass alle durch Addition oder Subtraction zu vereinigenden Decimalbrüche gleichviele Decimalstellen haben. Ebenso viele Decimalstellen muss dann auch das Resultat haben. Schreibt man also die zu vereinigenden Zahlen so unter einander, dass die Komma unter einander stehen, so steht auch das Komma des Resultates unter denen der einzelnen Zahlen. (Aufgaben: Hofmann 1. Erste Abtheilung XV.)

Anm. Die Hinzufügung der Nullen ist nur dann nöthig, wenn beim Subtrahiren der Minuend weniger Decimalstellen hat als der Subtrahend.

Multiplication. — Enthält der eine Factor m , der andere n Decimalstellen, so wird durch Weglassung des Kommas der eine mit 10^m , der andere mit 10^n multiplicirt. Wenn man also die beiden Decimalbrüche ohne Rücksicht auf das Komma multiplicirt, so ist das Resultat nachträglich noch durch 10^{m+n} zu dividiren; d. h.: das Resultat muss $m + n$ Decimalstellen haben.

Anm. Nullen am Ende des Resultats dürfen erst nach Setzung des Kommas weggelassen werden. — Warum? — Wie multiplicirt man einen Decimalbruch mit einer ganzen Zahl? Wie insbesondere mit einer Zahl von der Form $a \cdot 10^n$?

Division. — Durch Hinzufügen von Nullen auf der rechten Seite kann man bewirken, dass beide Decimalbrüche gleichviele Decimalstellen haben. Lässt man dann beide Kommas weg, so werden dadurch Dividend und Divisor mit derselben Potenz von 10 multiplicirt, der Quotient bleibt folglich unverändert, und die Aufgabe ist auf die Division zweier ganzer Zahlen zurückgeführt.

Anm. Wie dividirt man einen Decimalbruch durch eine ganze Zahl? Wie insbesondere durch eine Zahl von der Form $a \cdot 10^n$? (S. Formel 35.) — Ist die ganze Zahl des Dividend kleiner als der Divisor, so dividirt man erst die ganzen Zahlen durch einander; dies giebt 0,. Dann nimmt man die Decimalstellen einzeln herunter, und setzt, bis man dividiren kann, für jede Decimalstelle eine Null in's Resultat. — Warum?

(Aufgaben: Hofmann 1. Erste Abtheilung. XVI. XVII. XIX. XX.)

Radicirung mit 2. — Da diese Operation ein wiederholtes Divisionsverfahren ist, so wird das Komma ins Resultat gesetzt, sobald man die erste Decimalstelle benutzt. Bei der Bestimmung des ersten Gliedes wird nur auf die Anzahl der ganzen Stellen Rücksicht genommen, weil es nur von dieser Anzahl abhängt, ob die erste Stelle links eine Potenz von 10 mit geradem oder ungeradem Exponenten enthält.

161. Verwandlung eines Quotienten und einer Quadratwurzel in einen Decimalbruch. — Man verwandle den Dividend des Quotienten, oder den Radicanden der Wurzel durch Anhängung eines Kommas und beliebig vieler Nullen in einen Decimalbruch, und führe die Division oder Radicirung nach den für diesen Fall aufgestellten Regeln aus.

(Aufgaben: Hofmann 1. Erste Abth. XVIII.; 2. Vierter Abschn. II. 108—192.)

162. Eintheilung der Decimalbrüche. — 1) Aus Regel 165 geht hervor, wie ein Bruch, dessen Nenner eine Potenz von Zehn ist, unmittelbar als Decimalbruch geschrieben werden kann. — Hat der Nenner die Form $2^p \cdot 5^q$, d. h.: enthält er keine anderen Factoren als Potenzen von 2 und 5, so kann man den Bruch mit 5^{p-q} (wenn $p > q$) oder mit 2^{q-p} (wenn $p < q$) erweitern, wodurch der Nenner in 10^p oder 10^q übergeht. In diesen Fällen also hat das Divisionsverfahren, durch welches man den gegebenen Bruch in einen Decimalbruch verwandelt, ein Ende, weil der Decimalbruch eine endliche Anzahl von Decimalstellen enthält. Ein solcher Decimalbruch heisst ein endlicher.

2) Enthält der Nenner des Bruches nicht ausschliesslich Potenzen von 2 und 5 als Factoren, so ist es offenbar unmög-

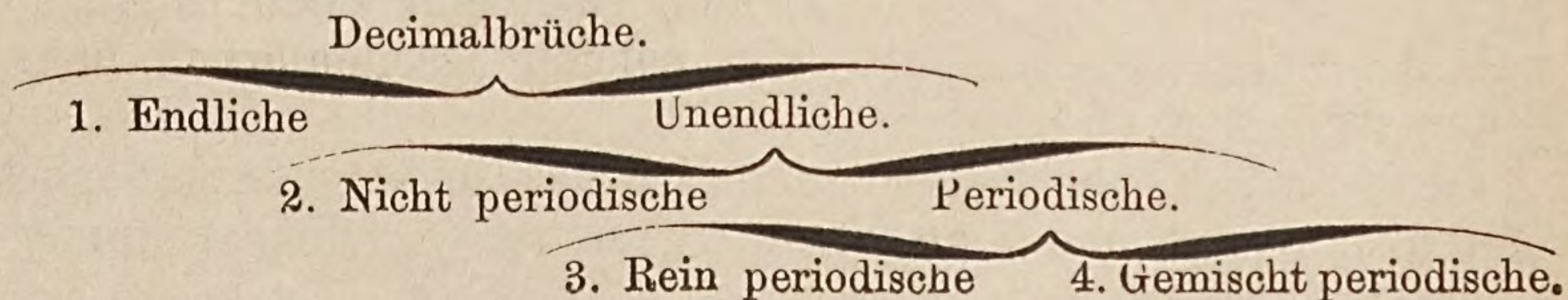
lich, ihn durch Erweiterung mit einer ganzen Zahl auf die Form 10^p zu bringen, also auch unmöglich, den Bruch als endlichen Decimalbruch darzustellen. In diesem Falle hat das Divisionsverfahren kein Ende, und der Decimalbruch heisst ein unendlicher.

Sei n der Nenner des gegebenen Bruches. Dann beträgt die Anzahl der möglichen Reste beim Divisionsverfahren $n - 1$. Folglich muss spätestens nach $n - 1$ Divisionen ein früherer Rest wiederkehren. Da aber an den jedesmaligen Rest eine Null angehängt wird, so kehrt nun auch ein früherer Dividend, folglich auch ein früherer Quotient wieder, und es wiederholt sich von nun an eine bestimmte Anzahl von Decimalstellen stets in derselben Reihenfolge. Ein solcher Decimalbruch heisst ein periodischer, und zwar rein periodisch, wenn die sich wiederholende Ziffernreihe (die Periode) unmittelbar hinter dem Komma beginnt, gemischt periodisch, wenn vor der ersten Periode noch Ziffern stehen, die sich nicht wiederholen.

Anm. Ein Quotient kann also nur einen endlichen, oder einen unendlichen periodischen Decimalbruch liefern. — Der Decimalbruch ist rein periodisch, wenn der Nenner des gegebenen Bruches weder 2 noch 5 als Factor enthält, gemischt periodisch, wenn er ausser anderen Factoren noch Potenzen von 2 oder 5 enthält, endlich, wenn er nur Potenzen von 2 oder 5 als Factoren enthält. Die Anzahl der Decimalstellen eines endlichen, und der vorperiodischen Stellen eines gemischt periodischen Decimalbruchs ist dem Exponenten der im Nenner enthaltenen Potenz von 2 oder 5 gleich. — Die Periode pflegt man nur einmal hinzuschreiben und durch einen darüber gezogenen wagerechten Strich zu bezeichnen.

3) Diejenigen unendlichen Decimalbrüche, welche aus dem Verfahren der Quadratwurzelausziehung hervorgehen, können weder endliche noch periodische sein, weil (wie sogleich gezeigt werden wird) jeder endliche und jeder periodische Decimalbruch in einen Quotienten verwandelt werden kann, welcher der irrationalen Quadratwurzel nicht gleich sein kann. Diese Decimalbrüche sind also (nebst allen anderen, welche irrationalen Zahlen gleich sind) unendlich und nicht periodisch.

Aus diesen Betrachtungen geht folgende Eintheilung der Decimalbrüche hervor.



163. Verwandlung eines Decimalbruchs in einen Quotienten.

1) Endliche Decimalbrüche. — Aus Regel 165 geht unmittelbar die Regel hervor: Ein endlicher Decimalbruch 166. ist gleich einem Quotienten, dessen Dividend die Decimalstellen, und dessen Divisor eine Eins mit ebensovielen Nullen enthält, als Decimalstellen vorhanden sind.

2) Rein periodische Decimalbrüche. — Jeder endliche Decimalbruch konnte als Summe von Brüchen dargestellt werden, deren Zähler die einzelnen Decimalstellen, deren Nenner Potenzen von 10 waren. Auch konnten mehrere dieser Brüche oder alle zu einem einzigen Bruche vereinigt werden. Ganz ebenso kann man die Perioden eines Decimalbruchs einzeln als Brüche darstellen. Ist dann a die Periode, und x der nach Regel 166 gebildete zugehörige Nenner, so ist der Decimalbruch, dessen Werth mit s bezeichnet werden mag, gleich der unendlichen geometrischen Reihe

$$s = \frac{a}{x} + \frac{a}{x^2} + \dots = a - x^{-1} + ax^{-2} + \dots = \frac{a}{x} (1 + x^{-1} + x^{-2} + \dots)$$

mithin nach 148, da $q = \frac{1}{x}$ zu setzen ist:

$$s = \frac{a}{x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{a}{x - 1}.$$

Da x aus einer Eins mit ebensovielen Nullen besteht, als a Stellen hat, so besteht $x - 1$ aus ebensovielen Neunen, als a Stellen hat, und die letzte Formel giebt hiernach die Regel: Ein rein periodischer Decimalbruch ist gleich einem 167. Quotienten, dessen Dividend die Periode, und dessen Divisor ebensoviele Neunen enthält, als die Periode Stellen hat.

3) Gemischt periodische Decimalbrüche. — Wenn die Stellen einer Periode durch a , und ihre Anzahl durch p , ferner die vorperiodischen Stellen durch b , und ihre Anzahl durch q , endlich 10 durch x bezeichnet wird, so gehört nach Regel 166 zu den vorperiodischen Stellen der Nenner x^q , und zu den einzelnen Perioden die Nenner x^{q+p} , x^{q+2p} , ... Mit hin ist der Werth des Decimalbruches

$$\begin{aligned}
 s &= \frac{b}{x^q} + \frac{a}{x^{q+p}} + \frac{a}{x^{q+2p}} + \dots \\
 &= \frac{b}{x^q} + \frac{a}{x^{q+p}} \left(1 + \frac{1}{x^p} + \frac{1}{x^{2p}} + \dots \right) \\
 &= \frac{b}{x^q} + \frac{a}{x^{q+p}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{x^p}} = \frac{b}{x^q} + \frac{a}{x^{q+p} - x^q} \\
 &= \frac{1}{x^q} \left(b + \frac{a}{x^p - 1} \right) = \frac{(bx^p + a) - b}{x^q(x^p - 1)}.
 \end{aligned}$$

168. Nun ist $(bx^p + a)$ die Zahl, welche entsteht, wenn man die vorperiodischen Stellen mit der ersten Periode zusammen als eine Zahl betrachtet; $(x^p - 1)$ eine Zahl, welche aus soviel Neunen besteht, als die Periode Stellen hat, und x^q eine Zahl, welche aus einer Eins mit soviel Nullen besteht als vorperiodische Stellen vorhanden sind. Multiplicirt man nun $x^p - 1$ mit x^q , so erhält man eine Zahl, die soviel Neunen enthält als periodische, und soviel Nullen als vorperiodische Stellen vorhanden sind. Die letzte Formel giebt also die Regel: Ein gemischt periodischer Decimalbruch ist gleich einem Quotienten, dessen Dividend erhalten wird, wenn man die vorperiodische Zahl von derselben um die erste Periode verlängerten Zahl subtrahirt, und dessen Divisor aus soviel Neunen besteht als die Periode Stellen hat, und aus soviel Nullen, als vorperiodische Stellen da sind.

Anm. Nach Anwendung der Regeln 166, 167, 168 hat man noch (nach Nr. 157, 1) den grössten gemeinsamen Factor zwischen Zähler und Nenner zu suchen und den Bruch durch denselben zu heben.

(Aufgaben: Hofmann 1. Erste Abth. XVIII.)

3. Näherungswerthe.

164. Vorbemerkung. — Soll ein unendlicher Decimalbruch für weitere Rechnungen brauchbar sein, so muss man ihn an irgend einer Stelle abbrechen. Man erhält dadurch für die gebrochene oder irrationale Zahl, die er vertritt, einen Näherungswerth, der um so genauer ist, je mehr Stellen er enthält. — Ein solcher Näherungswerth hat, der gebrochenen oder irrationalen Zahl gegenüber, einerseits den Nachtheil einer nicht vollkommenen Genauigkeit, andererseits aber den Vortheil, dass seine Grösse leicht mit derjenigen anderer Decimalzahlen

verglichen, und dass mit ihm ebenso wie mit anderen Decimalzahlen gerechnet werden kann. Jener Nachtheil kommt aber nicht in Betracht, wenn, was in der angewandten Arithmetik meist der Fall ist, die Zahlen, mit denen man rechnet, Resultate von Beobachtungen sind, welche selbst nicht auf vollkommene Genauigkeit Anspruch machen können. Es genügt alsdann, von vornherein zu bestimmen, welchen Grad der Genauigkeit die Rechnung haben soll, d. h. wie viele Decimalstellen von allen darin vorkommenden Decimalbrüchen benutzt werden sollen. Um die Fehler, welche durch das Abkürzen der Decimalbrüche entstehen, nicht zu gross werden zu lassen, bedient man sich der Regel:

Die letzte Ziffer des abgekürzten Decimalbruchs 169. wird um Eins vergrössert, wenn die erste Ziffer des weggelassenen Theiles ≥ 5 ist.

Lässt man nun die Forderung einer absoluten Genauigkeit der Resultate fallen, so erhebt sich die Frage, ob es nicht möglich ist, die in der reinen Arithmetik ungelöst gebliebenen Aufgaben: Ein Polynom mit einer Zahl (ausser 2) zu radiciren und logarithmiren, und, eine Gleichung von höherem als vierten Grade aufzulösen, wenigstens durch Bestimmung von Näherungswerthen zu lösen. Dies gelingt nun in der That theils mittelst der Kettenbrüche, theils mittelst der Logarithmen.

a. Näherungswerthe durch Kettenbrüche.*)

165. Näherungsweise Bestimmung der Wurzel einer Gleichung. — Setzt man in einer geordneten und auf Null gebrachten Gleichung $A = 0$ die Unbekannte x gleich der ganzen Zahl n , und nennt den Werth, welchen A durch diese Substitution erhält, A_n , so entsprechen sich die Werthe

$$x = n, n-1, \dots 3, 2, 1, 0, -1, -2, \dots$$

$$A = A_n, A_{n-1}, \dots A_3, A_2, A_1, A_0, A_{-1}, A_{-2}, \dots$$

Liegt nun eine Wurzel der Gleichung zwischen a_1 und $a_1 + 1$, so liegt offenbar der zu dieser Wurzel gehörige Werth von A , nämlich Null, zwischen A_{a_1} und A_{a_1+1} ; d. h.: eine dieser beiden Zahlen muss positiv und die andre negativ sein. Umgekehrt kann man also, wenn zwei benachbarte Zahlen der Reihe, A_{a_1}

*) Beispiele s. am Schluss des Buches in der „Uebersicht der Formeln und Regeln“.

und A_{a_1+1} , entgegengesetzte Zeichen haben, schliessen, dass eine Wurzel der Gleichung zwischen a_1 und $a_1 + 1$ liegen wird. Demnach setzt man

$$x = a_1 + \frac{1}{x_1},$$

substituiert diesen Werth in die Gleichung $A = 0$, und erhält dadurch eine Gleichung mit der Unbekannten x_1 , die man ebenso behandelt wie die gegebene. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man allmählig die Gleichungen:

$$x_1 = a_2 + \frac{1}{x_2}; \quad x_2 = a_3 + \frac{1}{x_3}; \quad \dots,$$

und durch Elimination von $x_1, x_2, \dots$

$$x = a_1 + 1/a_2 + 1/a_3 + \dots$$

Dieser, bis auf eine beliebige Anzahl von Gliedern fortgesetzte Kettenbruch kann dann in einen Quotienten, und schliesslich in einen Decimalbruch verwandelt werden.

(Aufgaben: Bardey XL.)

166. Näherungsweise Bestimmung eines Logarithmus. — Es sei zu bestimmen

$${}^a\!b = y,$$

oder, was dasselbe ist, die Gleichung aufzulösen:

$$a^y = b.$$

Dann kann man stets zwei Zahlen x_1 und $x_1 + 1$ so bestimmen, dass

$$a^{x_1} < b; \quad a^{x_1+1} > b$$

ist. Sei dann

$$a^{x_1} = b_1; \quad a^{x_1+1} = c_1,$$

so setzen wir

$$y = x_1 + \frac{1}{y_1},$$

woraus folgt:

$$a^y = a^{x_1} \cdot a^{\frac{1}{y_1}}$$

oder

$$b = b_1 \cdot a^{\frac{1}{y_1}};$$

$$a^{\frac{1}{y_1}} = \frac{b}{b_1} = a_1;$$

$$a_1^{y_1} = a.$$

Diese Gleichung wird genau so behandelt wie die gegebene, und das ganze Verfahren beliebig oft wiederholt, wie folgendes Schema zeigt:

$a^y = b$	$a_1^{y_1} = a$	$a_2^{y_2} = a_1$	.
$\left\{ \begin{array}{l} a^{x_1} = b_1 \\ a^{x_1+1} = c_1 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} a_1^{x_2} = b_2 \\ a_1^{x_2+1} = c_2 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} a_2^{x_3} = b_3 \\ a_2^{x_3+1} = c_3 \end{array} \right.$	.
$(b_1 < b < c_1)$	$(b_2 < a < c_2)$	$(b_3 < a_1 < c_3)$	.
$y = x_1 + \frac{1}{y_1}$	$y_1 = x_2 + \frac{1}{y_2}$	$y_2 = x_3 + \frac{1}{y_3}$	.
$a^y = a^{x_1} \cdot a^{\frac{1}{y_1}}$	$a_1^{y_1} = a_1^{x_2} \cdot a_1^{\frac{1}{y_2}}$	$a_2^{y_2} = a_2^{x_3} \cdot a_2^{\frac{1}{y_3}}$	.
$b = b_1 \cdot a^{\frac{1}{y_1}}$	$a = b_2 \cdot a_1^{\frac{1}{y_2}}$	$a_1 = b_3 \cdot a_2^{\frac{1}{y_3}}$	.
$\frac{b}{b_1} = a_1 = a^{\frac{1}{y_1}}$	$\frac{a}{b_2} = a_2 = a_1^{\frac{1}{y_2}}$	$\frac{a_1}{b_3} = a_3 = a_2^{\frac{1}{y_3}}$	.
$a_1^{y_1} = a$	$a_2^{y_2} = a_1$	$a_3^{y_3} = a_2$	.

Aus den in der 5. wagerechten Reihe stehenden Gleichungen erhält man dann durch Elimination von $y_1, y_2, \dots$

$$y = x_1 + 1/\overline{x_2} + 1/\overline{x_3} + \dots,$$

wodurch der gesuchte Logarithmus in Form eines Kettenbruches dargestellt ist.

b. Näherungswerthe durch Logarithmen.

167. Addition und Subtraction von Decimalbrüchen sind Rechnungen, die leicht ausführbar sind, und wieder auf Decimalbrüche führen von derselben Stellenzahl, also auch von derselben Genauigkeit, wie die gegebenen. Dagegen erfordern Multiplication und Division zweier Decimalbrüche, sowie Potenzirung eines Decimalbruchs mit einer ganzen Zahl, umständliche Rechnungen, die sogar zum Theil nutzlos sind, wenn das Resultat mehr Decimalstellen enthält, als die gegebenen Zahlen, da man in diesem Falle die überflüssigen Decimalstellen weglassen wird. Es ist also wichtig, ein Verfahren zu kennen, welches diese Rechnungen in kürzerer Weise ausführen lehrt. Ein solches Verfahren, welches gleichzeitig auch die bisher noch ungelösten Aufgaben zum Abschluss bringt, einen Deci-

malbruch (oder eine Decimalzahl) mit einem beliebigen anderen zu potenziren und zu radiciren, ergibt sich aus den Eigenschaften der Logarithmen.

Es zeigen nämlich die Formeln 63, 64, 66, 67

$$\begin{aligned} {}^c l(xy) &= {}^c l x + {}^c l y; & {}^c l(x^b) &= b \cdot {}^c l x \\ {}^c l\left(\frac{z}{y}\right) &= {}^c l z - {}^c l y; & {}^c l(\sqrt[b]{y}) &= \frac{{}^c l y}{b} \end{aligned}$$

übereinstimmend die Eigenschaften, dass die Logarithmen jeder Formel dieselbe Grundzahl haben, und dass die mit den Logarithmen rechts auszuführenden Rechnungen eine Stufe tiefer stehen, als diejenigen, welche links in den Klammern angedeutet sind.

Kennt man also die Logarithmen aller Decimalzahlen (bis zu irgend einer Grenze) nach derselben Basis c , so kann man z. B. das Product $z = xy$, worin x und y gegebene Zahlen sind, dadurch ausrechnen, dass man die Logarithmen dieser Zahlen addirt, und zu dem so gefundenen Logarithmus den zugehörigen Numerus aufsucht. So wird die Multiplication durch eine Addition ersetzt, und, wie die drei übrigen Formeln zeigen, die Division durch eine Subtraction, die Potenzirung durch eine Multiplication, die Radicirung durch eine Division. — Da der Logarithmus eines Decimalbruches als Differenz der Logarithmen von Dividend und Divisor des ihm entsprechenden Quotienten dargestellt werden kann, so sieht man, dass die abgekürzte Rechnung nicht nur auf Decimalzahlen, sondern auch auf Decimalbrüche angewendet werden kann. Es ist aber nicht zu vergessen, dass, da die Logarithmen selbst in ihrer grossen Mehrzahl, (sofern sie als Decimalbrüche dargestellt sind) nur Näherungswerthe sind, auch die mit ihrer Hilfe gefundenen Resultate im Allgemeinen dieselbe Eigenschaft besitzen.

168. Logarithmische Systeme. — Erklärungen. — 1) Unter einem logarithmischen Systeme versteht man den Inbegriff aller zu derselben Grundzahl gehörigen Logarithmen.

2) Der Inbegriff der ganzen Stellen des einen Logarithmus darstellenden Decimalbruches heisst die Kennziffer, der Inbegriff der Decimalstellen die Mantisse.

3) Dasjenige logarithmische System, welches die zur Grund-

zahl 10 gehörigen Logarithmen enthält, heisst das gemeine (Briggische). *)

Anm. Die Grundzahl 10 pflegt beim Schreiben und Sprechen weggelassen zu werden.

169. Eigenschaften des gemeinen logarithmischen Systems. —
1) Es ist

$$l(10^n) = n \cdot l10 = n; \quad (66, 62.)$$

d. h.: Der Logarithmus einer Potenz von 10 ist gleich 170. ihrem Exponenten.

2) Da die Potenzen von 10 um so grösser sind, je grösser ihr Exponent ist, und umgekehrt, so hat die grössere von 171. zwei Zahlen den grösseren Logarithmus.

3) Aus 170 und 171 folgt: Die Logarithmen aller Zahlen
zwischen 1 und 10 liegen zwischen 0 und 1
„ 10 „ 100 „ „ 1 „ 2
„ 100 „ 1000 „ „ 2 „ 3
• • • • •

Nun sind aber die Zahlen zwischen 1 (incl.) und 10 (excl.) die einstelligen, die zwischen 10 und 100 die zweistelligen Zahlen, u. s. w. Andererseits haben alle als Decimalbrüche ausgedrückte Logarithmen, wenn sie zwischen 0 und 1 liegen, die Kennziffer 0; wenn zwischen 1 und 2, die Kennziffer 1, u. s. w. — Man kann daher auch sagen: Die Logarithmen aller einstelligen Zahlen haben die Kennziffer 0, die aller zweistelligen Zahlen die Kennziffer 1; allgemein:

Die Kennziffer eines Logarithmus ist um Eins 172. kleiner als die Stellenzahl des zugehörigen Numerus.

Anm. Man kann daher die Kennziffer ohne weiteres hinschreiben, und es brauchen die logarithmischen Tabellen nur die Mantissen der Logarithmen zu enthalten.

4) Es ist

$$l(10^n \cdot a) = n \cdot l10 + la = n + la;$$

d. h. (wenn n und a ganze Zahlen sind): Die Logarithmen 173.

*) Dieses System ist für Anwendungen auf die Decimalrechnung deswegen das vortheilhafteste, weil seine Grundzahl auch die Grundzahl der Decimalrechnung ist. Ausserdem ist noch das natürliche (Nepersche) System zu erwähnen, dessen Grundzahl der Werth der unendlichen Reihe

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

für $x = 1$ ist ($e = 2,7182818 \dots$)

Henry Briggs (1560—1630) und John Napier (1550—1617), englische Mathematiker.

solcher ganzen Zahlen, die sich nur durch angehängte Nullen von einander unterscheiden, haben dieselbe Mantisse, und unterscheiden sich nur durch die Kennziffer.

174. 5) Ist a ein Decimalbruch, so ist $10^n \cdot a$ ein Decimalbruch, der sich nur durch die Stelle des Kommas von a unterscheidet. Man hat also die Regel: In einem Decimalbruch hat die Stellung des Kommas keinen Einfluss auf die Mantisse.

175. 6) Vermindert man in einer Decimalzahl durch Setzen eines Kommas die Zahl der ganzen Stellen um n , so wird die Zahl durch 10^n dividirt, oder (was dasselbe ist) mit 10^{-n} multiplicirt, also vermindert sich (nach 173) die Kennziffer ihres Logarithmus ebenfalls um n . D. h.: Die Kennziffer des Logarithmus eines Decimalbruches ist um Eins kleiner als die Anzahl seiner ganzen Stellen.

7) Setzen wir in der Formel 173 $-n$ statt n , und nehmen an, dass a eine ganze Zahl ist, deren Stellenzahl $p \leq n$ ist, so lautet die Formel:

$$l\left(\frac{a}{10^n}\right) = l a - n.$$

Wird nun $\frac{a}{10^n}$ als Decimalbruch geschrieben, so muss derselbe (nach 165) n Decimalstellen haben; mithin müssen den p Stellen von a noch $n - p$ Nullen als Decimalstellen, und eine Null vor dem Komma, also im Ganzen $n - p + 1$ Nullen vorgesetzt werden. Die Kennziffer des Logarithmus für a ist $p - 1$; für $\frac{a}{10^n}$ also ist sie $p - 1 - n = -(n - p + 1)$; man hat daher die

176. Regel: Die Kennziffer des Logarithmus eines Decimalbruches, welcher mit Nullen beginnt, ist gleich der negativ genommenen Anzahl aller dieser Nullen.

Anm. Die Regeln 172—176 lassen sich so zusammenfassen: Die Kennziffer des Logarithmus eines Decimalbruches (Decimalzahl) ist, wenn derselbe > 1 ist, gleich der um 1 verminderten Anzahl seiner ganzen Stellen; wenn er aber < 1 ist, gleich der negativ genommenen Anzahl der voranstehenden Stellen. — Die Mantisse des Logarithmus eines Decimalbruches (Decimalzahl) ist von den etwa vor oder nachstehenden Nullen, sowie vom Komma unabhängig. —

Die negative Kennziffer wird hinter die Decimalstellen des Logarithmus gesetzt, der hiernach als Differenz eines Decimalbruches mit 0 Ganzen, und einer ganzen Zahl erscheint und behandelt wird.

Die Regeln 173—176 lassen sich auch dadurch finden, dass man eine ganze Zahl wiederholt mit 10 multiplicirt, oder durch 10 dividirt, und die Veränderungen in der Kennziffer ihres Logarithmus feststellt.

Da die Potenzen einer positiven Zahl nie negativ sind, so giebt es im gemeinen Logarithmensystem für negative Zahlen keine Logarithmen. Soll ein negativer Ausdruck logarithmisch berechnet werden, so berechnet man den positiven Ausdruck, und giebt erst dem gefundenen Resultate das Zeichen —.

Je nach dem Grade der Genauigkeit, welchen die logarithmischen Rechnungen haben sollen, benutzt man logarithmische Tafeln mit 7, 6, 5, 4 Decimalstellen der Mantisse, oder auch nur das Rechenlineal.*)

(Aufgaben: Hofmann 3. Elfter Abschn. II. III. IV. V. — Bardey XVIII. C. D.)

II. Die Zinsrechnung.

1. Einfache Zinsrechnung.

170. Vorbemerkung. — Der Zuwachs z_1 , den eine durch die Zahl c ausgedrückte Grösse in einer bestimmten Zeit erfährt, kann als Bruchtheil der Zahl c ausgedrückt werden, und zwar mittelst der Decimalbrüche stets als Bruch mit dem Nenner 100. Beträgt dieser Zuwachs $\frac{p}{100}$ von c , so ist demnach

$$1) \quad z_1 = \frac{pc}{100}. \quad 177.$$

171. Erklärungen. — 1) Eine Geldsumme c , welche sich in gleichen Zeiten um gleiche Summen vermehrt, heisst Capital; der jährliche Zuwachs dieser Summe, z_1 , die Zinsen des Capitals für ein Jahr; und die Zinsen p für jedes Hundert des (in irgend einer Münze ausgedrückten) Capitals der Zinsfuss (die Procente).

2) Man sagt: Das zum Zinsfuss p (zu p Procent) stehende Capital c bringt in einem Jahre die Zinsen z_1 .

Anm. Die Bedeutung von p ergibt sich, wenn man in Formel 1) $c = 100$ setzt. Den Namen Procente führt p auch dann, wenn die Zahlen z_1 und c die in der Vorbemerkung gegebene allgemeinere Bedeutung haben.

172. Weitere Formeln. — Bezeichnet man den Zuwachs von c in n Jahren mit z_n , so ist, weil derselbe nach Erklärung 1) n mal so gross ist als derjenige in einem Jahre,

*) Siebenstellig, z. B.: Vega, Berlin b. Weidmann. Sechsstellig: Bremiker, Berlin b. Nikolai. Fünf- und vierstellig: Bremiker, Berlin b. Weidmann. — Das Rechenlineal, von Tavernier-Gravet, Rue de Babylone 39 Paris, beschrieben in der „Ztschr. f. math. u. naturw. Unterricht v. Hoffmann“ Bd. 3. S. 336.

$$178. \quad 2) \quad z_n = \frac{npc}{100}.$$

Aus 2) folgt weiter:

$$179. \quad 3) \quad n = \frac{100 z_n}{pc}; \quad p = \frac{100 z_n}{nc}; \quad c = \frac{100 z_n}{np}.$$

Mittelst der Formeln 2) und 3) lassen sich alle Aufgaben der einfachen Zinsrechnung lösen. Dieselben Formeln lassen sich in folgende mechanische Regel zusammenfassen:

Ist nach Zinsen gefragt, so kommt 100 unter den Divisionsstrich, alles andere darüber; ist nach etwas anderem als Zinsen gefragt, so kommt 100 und die Zinsen über den Divisionsstrich, alles andere darunter.

Anm. Ist $n=1$ und c der Einkaufspreis einer Waare, so heisst z_1 der Gewinn ($-z_1$ der Verlust); $c \pm z_1$ der Verkaufspreis. — Ist $s_n = c + z_n$ eine nach n Jahren zahlbare Summe, so heisst c die Baarzahlung, z_n der Disconto. — Ist c der Preis einer Waare, so heisst, wenn die Waare gleich beim Einkauf bezahlt wird, $-z_1$ der Rabatt, und $c - z_1$ ist dann die wirklich bezahlte Summe. Um alle hierher gehörigen Aufgaben zu lösen, braucht man nur noch eine Formel, welche lehrt c zu finden, wenn s_n , n , p gegeben sind. Nun erhält man aus 2)

$$s_n = c \pm z_n = \frac{c(100 \pm np)}{100};$$

also:

$$180. \quad 4) \quad c = \frac{100 s_n}{100 \pm np},$$

welches die verlangte Formel ist.

(Aufgaben: Hofmann 1. Zweite Abth. VI.)

2. Zinseszins-Rechnung.

173. Vorbemerkung. — In der einfachen Zinsrechnung wurde vorausgesetzt, dass die jährlichen Zinsen eines Capitals ausbezahlt würden, und das Capital selbst unverändert bliebe. Unterbleibt jene Auszahlung, so vergrößert sich das Capital jährlich um den Betrag der Zinsen des vorigen Jahres, und man sagt, das Capital stehe auf Zinseszins.

Anm. Ebenso wie die Zinsen, statt am Schlusse eines Jahres, in beliebigen anderen Zeitabschnitten ausbezahlt werden können, so können sie auch nach anderen Zeitabschnitten, als nach einem Jahre, „zum Capital geschlagen werden“. Ist dieser Zeitabschnitt der r^{te} Theil eines Jahres, so hat man in den Formeln der Zinseszins-Rechnung nur $\frac{p}{r}$ statt p , und nr statt n zu setzen. Die Formeln der einfachen Zinsrechnung erleiden durch diese Substitution keine Aenderung.

174. Bestimmung der Summe, zu der ein auf Zinseszins stehendes Capital anwächst. — Sei s_n die Summe, zu der das zum Zinsfuss p stehende Capital c nach n Jahren angewachsen ist, so ist nach 177

$$s_1 = c + \frac{pc}{100} = c \left(1 + \frac{p}{100} \right)$$

oder, wenn wir

$$1) \quad 1 + \frac{p}{100} = q \quad 181.$$

setzen:

$$s_1 = c \cdot q;$$

Ebenso:

$$s_2 = s_1 \cdot q;$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$s_n = s_{n-1} \cdot q.$$

Durch Multiplication aller dieser Formeln folgt:

$$2) \quad s_n = c \cdot q^n. \quad 182.$$

Anm. Man bestimme aus 2) die Werthe von c, n, q (p). Soll eine nach n Jahren zu leistende Zahlung durch eine sogleich zu leistende ersetzt werden, so ist c zu bestimmen.

175. Erweiterung. — Tritt am Schlusse jedes Jahres zu dem auf Zinseszins stehenden Capitale noch ein Capital b hinzu, das ebenfalls auf Zinseszins stehen soll, so wachsen diese Capitalien, von denen das erste ($n - 1$), das zweite ($n - 2$), . . . das n^{te} 0 Jahre lang verzinst wird, nach 2) zu den Summen an:

$$bq^{n-1}, bq^{n-2}, \dots bq^0.$$

Mithin beträgt am Schluss des n^{ten} Jahres die aus allen Capitalen sich ergebende Summe

$$\begin{aligned} s &= cq^n + bq^{n-1} + bq^{n-2} + \dots + b \\ &= cq^n + b(q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + 1) \end{aligned}$$

$$3) \quad s = cq^n + b \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}. \quad (147a.) \quad 183.$$

Anm. Man bestimme aus 3) die Werthe von c, b, n .

176. Specielle Fälle. — 1) $c = 0$. — Dieser Fall tritt ein, wenn man durch jährliche Zahlungen (Prämien) ein Capital s ersparen will, welches nach n Jahren oder nach dem Tode einer bestimmten Person ausbezahlt werden soll (Lebensversicherung. Im letzten Falle wird für n die bei Beginn der Zahlungen vorhandene wahrscheinliche Lebensdauer jener Person gesetzt. Vgl. den Abschnitt über Wahrscheinlichkeits-Rechnung).

2) b ist negativ. — Dies ist der Fall, wenn durch Abzahlungen jährlich eine Verringerung des Capitals stattfinden soll. Hierbei sind aber 3 Fälle zu unterscheiden. Die Zinsen des ersten Jahres sind nach 177 gleich $\frac{pc}{100}$, oder, nach 181, gleich $c(q - 1)$.

a) $b = c(q - 1)$. Dann deckt die jährliche Abzahlung nur die jährlichen Zinsen, und es findet offenbar keine Verminderung des Capitals statt, sodass einfache Zinsrechnung vorliegt. In der That erhält man $s = c$, wenn man in 183 b durch $-c(q - 1)$ ersetzt.

Anm. Dieser Fall findet statt, wenn aus den Zinsen eines Capitals eine jährliche Ausgabe von gleicher Grösse auf ewige Zeiten bestritten werden soll.

b) $b < c(q - 1)$. Dann werden die jährlichen Zinsen durch die jährliche Abzahlung nicht gedeckt, und das Capital fährt trotz der Abzahlung fort, sich zu vergrössern.

c) $b > c(q - 1)$. Dann bleibt nach Abrechnung der jährlichen Zinsen ein Theil der Abzahlung zur Verringerung des Capitals übrig, und zwar wird, da das Capital, also auch seine jährlichen Zinsen, immer kleiner wird, der auf die Verringerung des Capitals entfallende Theil der jährlichen Abzahlung immer grösser.

Anm. Dieser Fall findet statt, wenn ein Capital den Zweck hat, nur für eine bestimmte Zeit zur Bestreitung jährlich wiederkehrender Ausgaben zu dienen, wobei es nach Verlauf dieser Zeit erschöpft ist.

3) $s = 0$, b negativ. — Die Formel 3) lautet dann:

$$184. \quad cq^n = b \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Dieser Fall tritt ein, wenn ein Capital durch jährliche Abzahlungen nach einer bestimmten Zeit getilgt wird.

Anm. Man bestimme aus der letzten Formel die Werthe von b , c , n . Soll eine auf einem Grundstück ruhende, in Form einer n Jahre hindurch zu leistenden Zahlung b erscheinende Last durch eine einmalige Zahlung abgelöst werden, so ist c zu bestimmen.*) — Soll ermittelt werden, nach wieviel Jahren ein Capital c durch eine jährliche Zahlung b getilgt sein wird, so ist n zu bestimmen. — Soll endlich die Höhe der Geldsumme (Rente) bestimmt werden, die einer Person n Jahre lang gezahlt werden kann, wenn sie zu Anfang ein Capital c einzahlt, so ist b zu bestimmen.

(Aufgaben: Hofmann 3. Sechzehnter Abschn. — Bardey XXXIV.)

*) Ist die Last eine auf ewige Zeiten ruhende, so ist die Formel beiderseits durch q^n zu dividiren, und dann $n = \infty$ zu setzen, woraus $c = \frac{b}{q - 1}$ folgt.

Reine Combinatorik.

Einleitung.

177. Aus einer Reihe verschiedener Gegenstände lassen sich in mannigfaltiger Weise Gruppen aussondern. Man nennt in diesem Falle die Gegenstände Elemente; die durch Zusammenfassung mehrerer Elemente entstehenden Gruppen heissen Formen; und die Wissenschaft, deren erste Aufgabe es ist, auf alle möglichen Arten Combinationen einer gegebenen Menge von Elementen auszuwählen und zu zählen, heisst Combinatorik.

Ein Element wird durch eine Ziffer oder durch einen Buchstaben bezeichnet, eine Form durch eine Reihe von Ziffern oder Buchstaben.

Von zwei Elementen heisst dasjenige, welches durch eine Ziffer von höherem Werthe oder durch einen späteren Buchstaben des Alphabets bezeichnet ist, das höhere, das andere das niedere.

Anm. Ziffern und Buchstaben haben also hier eine durchaus andere Bedeutung als in der Arithmetik. Es fehlt ihnen der Begriff der Grösse, und verschiedene Buchstaben oder Ziffern dienen eben nur zur Unterscheidung verschiedener Elemente. Worin aber diese Verschiedenheit besteht, ob in der Grösse, Gestalt, Farbe, oder sonstigen Eigenschaften der Gegenstände, die man sich unter den Elementen denkt, ist ganz gleichgiltig. Da diese Gegenstände auch Zahlen sein können, so zeigt sich die Möglichkeit, die Combinatorik auf die Arithmetik anzuwenden.

Die Stellung, welche die einzelnen Elemente innerhalb einer Combination einnehmen, ist entweder unwesentlich oder wesentlich. Im zweiten Falle erwächst der Combinatorik die zweite Aufgabe: die Elemente einer gegebenen Combination auf alle möglichen Arten zu ordnen, und die Anzahl dieser verschiedenen Ordnungen zu bestimmen.

	1	2	3	4	.	.
12	21			31		41
13	23			32		42
14	24			34		43
..	..			..		..

Dritte Methode. Um aus der geordneten Elementen-Reihe alle Permutationen direct und geordnet zu bilden, erhöht man das dem Ende nächste Element, welches, ohne auf ein vorhergehendes höheres Element zurückzugreifen, noch erhöht werden kann, möglichst wenig, und ordnet die folgenden Elemente. Ebenso bildet man aus jeder Permutation die folgende. So erhält man z. B. für 6 Elemente der Reihe nach:

1 2 3 4 5 6
 1 2 3 4 6 5
 1 2 3 5 4 6
 1 2 3 5 6 4
 1 2 3 6 4 5
 1 2 3 6 5 4
 1 2 4 3 5 6

Anm. Wie bestimmt man die n^{te} Permutation einer gegebenen Combination, ohne die $n-1$ vorhergehenden zu bilden? — Wie bestimmt man von einer gegebenen Permutation, die wievielte sie ist? —

180. Bestimmung der Anzahl der Permutationen. — Erster Fall: Alle Elemente sind ungleich. — Aus der ersten der zur Bildung der Permutationen angewandten Methoden geht hervor, dass die Anzahl der Permutationen für 1 Element 1, für 2 Elemente $1 \cdot 2 = 2!$, für 3 Elemente $1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!$ beträgt. Sie wird daher für n Elemente $n!$ sein, wenn diese Bestimmung auch noch für $(n+1)$ Elemente gilt. Nun erhält man aber aus den Permutationen von n Elementen diejenigen von $(n+1)$ Elementen, wenn man in jeder der ersteren das neue Element an die $(n+1)$ vorhandenen Plätze stellt. Aus jeder der $n!$ Permutationen gehen also $(n+1)$ neue hervor, sodass die Gesamtzahl $n!(n+1) = (n+1)!$ beträgt. Mithin gilt, wenn mit P_n die Anzahl der Permutationen aus n Elementen bezeichnet wird, allgemein die Formel

$$P_n = n!$$

185.

Zweiter Fall: Unter den n Elementen sind p gleiche. — Wenn man alsdann in einer beliebig gewählten Form die p gleichen Elemente unter sich permutirt, so erhält

man $p!$ Formen, die sich gar nicht von einander unterscheiden. Stellt man nun zuerst alle diejenigen Formen auf, welche wirklich von einander verschieden sind, und permutirt in jeder die p gleichen Elemente unter sich, so erhält man sämtliche $n!$ Formen. Sei die Anzahl der von einander verschiedenen Formen P_{np} , so ist hiernach

$$p! P_{np} = n!$$

oder:

186.

$$P_{np} = \frac{n!}{p!}.$$

Sind ausser der Gruppe von p gleichen Elementen noch Gruppen von $q, r, \dots$ unter sich gleichen Elementen vorhanden, so erhält man durch Wiederholung der vorigen Betrachtung die Formel

187.
$$P_{npqr\dots} = \frac{n!}{p! q! r! \dots}.$$

Anm. Aus 187 folgt noch:

187a.
$$P_{np(n-p)} = \frac{n!}{p! (n-p)!} = n \cdot p \quad (129).$$

(Aufgaben: Hofmann 3. Siebzehnter Abschn. 50—70. — Bardey XXXV, A.)

2. Das Combiniren.

181. Erklärungen. — Eine Reihe von n Elementen zur p^{ten} Classe combiniren (die Combinationen zur p^{ten} Classe aus n Elementen bilden) heisst: aus diesen n Elementen auf alle möglichen Arten Formen bilden, welche p Elemente enthalten. Diese Formen heissen Combinationen zur p^{ten} Classe, und zwar Combinationen ohne Wiederholung, wenn jedes Element in jeder Form nur einmal, mit Wiederholung, wenn es beliebig oft vorkommen darf.

Anm. Man kann auch Combinationen mit beschränkter Wiederholung bilden, wobei die Anzahl der gleichen Elemente einer Form unter einer gegebenen Grenze bleiben muss; oder Combinationen zu einer bestimmten Summe, wobei die Summe der Zahlenwerthe der Elemente in jeder Form einer gegebenen Zahl gleich sein muss. — In jeder Form pflegt man die Elemente in dem beim Permutiren festgesetzten Sinne zu ordnen.

182. Bildung der Combinationen. — a) Ohne Wiederholung. Erste Methode. — Die Combinationen zur ersten Classe sind die Elemente selbst. Aus ihnen erhält man die Combinationen zur zweiten Classe, indem man jeder Form jedes Element hinzufügt, welches höher ist als ihr Endelement. So erhält man für 4 Elemente der Reihe nach die Formen:

1, 2, 3, 4.
12, 13, 14, 23, 24, 34.

Dasselbe Verfahren liefert die Combinationen zur dritten, wie zu höheren Classen.

Zweite Methode. Um aus der geordneten Elementen-Reihe alle Combinationen zur p^{ten} Classe direct zu bilden, schreibt man ihre ersten p Elemente auf, und erhöht dann das letzte Element, welches eine Erhöhung zulässt, so oft, als es die Zahl der gegebenen Elemente gestattet, um eine Einheit, während jedes dem erhöhten Element etwa folgende Element um eine Einheit höher angenommen wird als das vorhergehende. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens ergeben sich allmählig alle Combinationen. So erhält man z. B. die Combinationen zur 3. Classe aus 5 Elementen, wie folgt:

123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345.

b) Mit Wiederholung. — Die Methoden sind dieselben wie im vorigen Falle; nur wird bei der ersten Methode jedem Endelemente nicht nur jedes höhere, sondern auch das ihm gleiche Element hinzugefügt. Bei der zweiten Methode besteht die erste Form aus p Einheiten (1), und jedes dem erhöhten Element etwa folgende Element wird diesem gleich gesetzt.

Dadurch treten in dem für die erste Methode gegebenen Beispiel noch die Formen 11, 22, 33, 44 hinzu. Nach der zweiten Methode erhält man die Combinationen zur 3. Classe aus 3 Elementen, wie folgt:

111, 112, 113, 122, 123, 133, 222, 223, 233, 333.

183. Bestimmung der Anzahl der Combinationen. — a) Ohne Wiederholung. — Aus der ersten der zur Bildung der Combinationen angewandten Methoden geht hervor, dass die Anzahl der Combinationen aus n Elementen zur 1. Classe n ist. Um die Combinationen zur 2. Classe zu finden, kann man jedes der n Elemente mit jedem der $n - 1$ übrigen verbinden. Dies giebt $n(n - 1)$ Formen. Durch dieses Verfahren aber erhält man jede Form auf alle Arten permutirt, d. h. doppelt; mithin ist die Anzahl der verschiedenen Formen nur $\frac{n(n - 1)}{1 \cdot 2} = n \cdot 2$.

Durch die gleiche Betrachtung erhält man als Anzahl der Combinationen zur 3. Classe $\frac{n(n - 1)(n - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = n \cdot 3$, und allgemein,

wenn ${}^pC_n$ die Anzahl der Combinationen aus n Elementen zur p^{ten} Classe ohne Wiederholung bezeichnet:

188.

$${}^pC_n = n \cdot p.$$

b) Mit Wiederholung. Denkt man sich in jeder dieser Combinationen das 2^{te} Element um 1, das 3^{te} um 2, u. s. f.; das p^{te} endlich um $p - 1$ erhöht, so liefert jede Form eine Combination zur p^{ten} Classe aus $n + p - 1$ Elementen ohne Wiederholung. (Denn dadurch, dass auch das höchste Element n , wie alle vorhergehenden, an manchen Stellen um $p - 1$ erhöht wird, wächst die Anzahl der Elemente um $p - 1$. Und da die gleichen Elemente einer Form um verschiedene Grössen erhöht werden, so kommen in keiner der neuen Formen noch gleiche Elemente vor.)

Denkt man sich umgekehrt in jeder der Combinationen zur p^{ten} Classe aus $n + p - 1$ Elementen ohne Wiederholung das 2^{te} Element um 1, das 3^{te} um 2, u. s. f.; das p^{te} endlich um $p - 1$ erniedrigt, so liefert jede Form eine Combination zur p^{ten} Classe aus n Elementen mit Wiederholung.

Also entsprechen sich je zwei dieser verschieden gebildeten Formen; d. h.: die Anzahl der einen ist so gross wie die der andern. Bezeichnet man also die Anzahl der Combinationen aus n Elementen zur p^{ten} Classe mit Wiederholung durch ${}^pC^n$, so ist nach 188

189.

$${}^pC^n = (n + p - 1) \cdot p.$$

(Aufgaben: Hofmann 3. Siebzehnter Abschn. 78—100. — Bardey XXXV. B.)

3. Das Variiren.

184. Erklärungen. — Eine Reihe von n Elementen zur p^{ten} Classe variiren (die Variationen zur p^{ten} Classe aus n Elementen bilden) heisst: die permutirten Combinationen zur p^{ten} Classe aus diesen n Elementen bilden. Diese Formen heissen Variationen zur p^{ten} Classe, und zwar Variationen ohne oder mit Wiederholung, je nachdem die Combinationen ohne oder mit Wiederholung gebildet sind.

185. Bildung der Variationen. — a) Ohne Wiederholung. — Die Variationen zur ersten Classe sind die Elemente selbst. Aus ihnen erhält man die Variationen zur zweiten Classe, indem man jeder Form jedes Element hinzufügt, welches noch

nicht in ihr enthalten ist. So erhält man für 3 Elemente der Reihe nach die Formen:

$$\begin{array}{c} 1, \quad 2, \quad 3. \\ 12, 13, 21, 23, 31, 32. \end{array}$$

Dasselbe Verfahren liefert die Variationen zur dritten, wie zu höheren Classen.

b) Mit Wiederholung. — Die Methode ist dieselbe wie vorher; doch wird jeder Form jedes Element ohne Ausnahme hinzugefügt. Dadurch treten in dem obigen Beispiel noch die Formen 11, 22, 33 hinzu.

Anm. Diese Methode führt directer zum Ziel, als wenn man erst die Combinationen bildet, und dann jede Combination permutirt.

186. Bestimmung der Anzahl der Variationen. — a) Ohne Wiederholung. — Aus der oben gegebenen Bildungsmethode geht durch dieselbe Betrachtung, welche bei den Combinationen angestellt wurde, hervor, dass die Anzahl der Variationen ohne Wiederholung aus n Elementen zur 1^{ten} Classe n , zur 2^{ten} $n(n-1)$ ist; allgemein zur p^{ten} Classe (wenn diese Anzahl mit ${}^pV_n$ bezeichnet wird):

$${}^pV_n = n(n-1) \dots (n-p+1) = n \cdot^p . p! \quad 190.$$

b) Mit Wiederholung. — Man findet ebenso wie vorher, dass die Anzahl der Variationen mit Wiederholung aus n Elementen zur 1^{ten} Classe n , zur 2^{ten} n^2 ist; allgemein zur p^{ten} Classe (wenn diese Anzahl mit ${}^pV^n$ bezeichnet wird):

$${}^pV^n = n^p. \quad 191.$$

(Aufgaben: Hofmann 3. Siebzehnter Abschn. 71—100. — Bardey XXXV. C.)

Angewandte Combinatorik.

I. Die Binomialreihe.

187. *Vorbemerkung.* — Mit Hilfe der Combinatorik ist eine Aufgabe der Arithmetik lösbar, die früher nicht erledigt werden konnte. Es ist dies die in dem Ausdruck $(a + b)^c$ ausgesprochene zweite Grundaufgabe der Potenzirung. (Vgl. S. 28.) Wir werden diese Aufgabe hier nur für den Fall lösen, dass c eine ganze positive Zahl ist. Es lässt sich auch zeigen, dass die gefundene Formel allgemein gilt; doch gehören die dazu erforderlichen Betrachtungen nicht mehr in das Gebiet der Elemente.

188. *Aufstellung der Binomialreihe.* — Es sei das aus n Factoren bestehende Product

$$(x + a_1)(x + a_2)(x + a_3) \dots (x + a_n)$$

gegeben. Die Lösung der Klammern liefert offenbar ein nach fallenden Potenzen von x geordnetes Polynom, dessen erstes Glied x^n , dessen letztes $a_1 a_2 \dots a_n$ ist. Seien die Coefficienten der Potenzen von x einstweilen mit $c_1, c_2, \dots, c_n$ bezeichnet, so ist

$$1) \quad \begin{cases} (x + a_1)(x + a_2)(x + a_3) \dots (x + a_n) \\ = x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \dots + c_{n-1} x + c_n. \end{cases}$$

Um nun die Factoren c zu bestimmen, ist Folgendes zu beachten. Das Glied des Polynoms, welches x^{n-1} enthält, entsteht, wenn man aus allen Klammern, eine ausgenommen, den Summand x zur Multiplication bringt. So erhält man $a_1x^{n-1} + a_2x^{n-1} + \dots + a_nx^{n-1}$ oder $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)x^{n-1}$. Ebenso findet man die Factoren der übrigen Potenzen von x , nämlich:

$$c_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$c_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 + \dots$$

$$c_3 = a_1^2 a_2 a_3 + a_1 a_2 a_4 + \dots$$

• • • • •

$$G_N = a_1 a_2 \dots a_n.$$

Demnach ist c_1 die Summe aller Combinationen ohne Wiederholung zur 1^{ten} Classe aus den Elementen $a_1, a_2, \dots a_n$ (wobei die Elemente jeder Form durch Multiplication verbunden sind). Und allgemein ist c_p die Summe aller Combinationen ohne Wiederholung zur p^{ten} Classe aus den Elementen $a_1, a_2, \dots a_n$.

Setzt man nun

$$2) \quad a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n = a,$$

so ist

$$\begin{aligned} c_1 &= a(1 + 1 + \dots) \\ c_2 &= a^2(1 + 1 + \dots) \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ c_n &= a^n \end{aligned}$$

Und zwar enthält die p^{te} Klammer so viel Einheiten, als die Anzahl der Combinationen aus n Elementen zur p^{ten} Classe beträgt; d. h.: der Werth der p^{ten} Klammer ist $n \cdot p$ (nach 188). Folglich ist

$$3) \quad c_1 = n \cdot 1 \cdot a; \quad c_2 = n \cdot 2 \cdot a^2; \quad \dots \quad c_n = n \cdot n \cdot a^n = a^n.$$

Setzt man nun die Werthe 2) und 3) in 1) ein, so folgt:

$$4) \quad (x+a)^n = x^n + n \cdot 1 \cdot ax^{n-1} + n \cdot 2 \cdot a^2 x^{n-2} + \dots + n \cdot n \cdot a^n. \quad 192.$$

Diese Formel wird für jeden ganzen und positiven Werth von n gelten, wenn sie unter der Voraussetzung, dass sie für den Exponenten n richtig ist, auch noch für $n+1$ gilt. (Denn nach 44 gilt sie für die Werthe $n=2$ und $n=3$.)

Nun ist

$$\begin{aligned} &(x+a)^{n+1} = (x+a)(x+a)^n \\ &= x^{n+1} + n \cdot 1 \cdot ax^n + n \cdot 2 \cdot a^2 x^{n-1} + \dots + n \cdot n \cdot a^n x \\ &\quad + \quad ax^n + n \cdot 1 \cdot a^2 x^{n-1} + \dots + n \cdot n \cdot a^n x + n \cdot n \cdot a^{n+1} \\ &= x^{n+1} + (n+1) \cdot 1 \cdot ax^n + (n+1) \cdot 2 \cdot a^2 x^{n-1} + \dots + (n+1) \cdot n \cdot a^n x + (n+1) \cdot (n+1) \cdot a^{n+1}. \end{aligned}$$

(Denn nach 136 ist $n \cdot p + n \cdot (p-1) = (n+1) \cdot p$). Die Formel gilt also auch für den Exponenten $n+1$, mithin, da sie für $n=2$ und $n=3$ gilt, für jeden ganzen und positiven Werth von n .

Anm. Ist a negativ, so haben die Glieder auf der rechten Seite abwechselnd positive und negative Vorzeichen.

Setzt man in 4) $a=1$, und ordnet die Glieder auf beiden Seiten von rechts nach links, so erhält man

$$5) \quad (x+1)^n = 1 + n \cdot 1 \cdot x + n \cdot 2 \cdot x^2 + n \cdot 3 \cdot x^3 + \dots \quad 193.$$

189. Erklärung. — Die Reihe

$$1 + n \cdot 1 \cdot x + n \cdot 2 \cdot x^2 + n \cdot 3 \cdot x^3 + \dots$$

heisst Binomialreihe, x ihre Grundzahl, n ihr Exponent, die Factoren $n \cdot 1, n \cdot 2, \dots$ die Binomialcoefficienten.

Anm. Für negative und umgekehrte Exponenten gilt die Binomialformel 5) nur, wenn ihre Grundzahl < 1 ist. Die Binomialreihe ist in beiden Fällen eine unendliche, weil kein Binomialcoefficient den Factor Null enthalten kann, die Reihe sich also beliebig fortsetzen lässt. Setzt man in 4) $a = y + z$, so lässt sich eine Formel für $(x + y + z)^n$ aufstellen (Polynomial-Formel).

Wenn in 5) x und n negativ angenommen werden, so erhält man:

$$(1 - x)^{-n} = 1 - (-n) \cdot^1 x + (-n \cdot^2) x^2 - (-n \cdot^3) x^3 + \dots$$

oder, da nach 138 $(-n) \cdot^p = (-1)^p (n + p - 1) \cdot^p$ ist:

$$193a. \quad \frac{1}{(1 - x)^n} = 1 + n \cdot^1 x + (n + 1) \cdot^2 x^2 + (n + 2) \cdot^3 x^3 + \dots$$

Welche Zahlenreihen bilden die Coefficienten für $n = 1, 2, 3, \dots$? Bestimmung derselben Zahlenreihen durch das Divisionsverfahren. — Welche

Zahlenreihen liefert für die obigen Werthe von n der Ausdruck $\frac{1 + x}{(1 - x)^n}$ wenn man ihn mittelst der unmittelbar klaren Formel

$$\frac{1 + x}{(1 - x)^n} = 2 \left[\frac{1}{(1 - x)^n} \right] - \frac{1}{(1 - x)^{n-1}}$$

berechnet?

Wenn man in der Formel $(1 + x)^p \cdot (1 + x)^q = (1 + x)^{p+q}$ die drei Potenzen nach 193 in Reihen entwickelt, und nach Ausführung der Multiplication links die Coefficienten der gleichhohen Potenzen von x links und rechts gleich setzt, so erhält man Formel 137.

(Aufgaben: Hofmann 3. Siebzehnter Abschn. 10—49.)

II. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Einleitung.

190. Wahrscheinlichkeit durch Beobachtung. — Jedes Ereigniss hängt von einer oder mehreren Ursachen ab. Mehrere Ereignisse können durch Ursachen von gleicher oder verschiedener Stärke bestimmt werden. Hängen mehrere Ereignisse so zusammen, dass in einem gegebenen Falle das eine oder das andere erfolgen muss, dass es aber dem Zufalle überlassen bleibt, welches derselben erfolgt, so kann man aus dem Eintreten desselben noch keinen Schluss auf die Stärke der bestimmenden Ursache ziehen. Mehrt sich aber die Zahl der gegebenen Fälle, so werden diejenigen Ereignisse, welche von stärker wirkenden Ursachen abhängen, häufiger, jene dagegen, deren Ursachen schwächer wirken, seltener eintreten. Die Wirkung des Zufalls tritt also zurück, und nähert sich der Grenze Null in demselben Masse, wie die Anzahl der gegebenen Fälle wächst. Dagegen tritt die Wirkung der die Ereignisse bestimmenden Ursachen hervor, und zeigt sich in den Zahlen, welche

angeben, wie oft jenes Ereigniss eintrat. Wenn also in einer grossen Anzahl gegebener Fälle (n) p Arten von Ereignissen eintreten, und zwar die erste Art a_1 mal, die zweite a_2 mal, ... die p^{te} a_p mal, (sodass

$$a_1 + a_2 + \dots + a_p = n$$

ist), dann kann man rückwärts schliessen, dass die Ursachen dieser Ereignisse in ihrer Stärke sich annähernd verhalten wie die Zahlen $a_1, a_2, \dots a_p$. (Wenn n immer grösser wird, so werden die Verhältnisse dieser Zahlen immer kleinere Aenderungen erleiden und sich festen Werthen nähern.) Man kann aber auch vorwärts schliessen, dass, wenn die n gegebenen Fälle auf's Neue eintreten, dann das erste Ereigniss wieder a_1 mal, das zweite a_2 mal, etc. eintreten wird. Man nennt dann

den Quotienten $\frac{a_r}{n}$ die Wahrscheinlichkeit des r^{ten} Ereignisses (die Wahrscheinlichkeit, dass in einem gegebenen Falle das Ereigniss eintritt). Diese Wahrscheinlichkeit, welche durch Beobachtung und Zählung wirklicher Ereignisse (a posteriori) gefunden wird, hat nach dem oben Gesagten nur die Genauigkeit eines Näherungswerthes. Die Wissenschaft, welche solche Beobachtungen und Zählungen anstellt, und aus ihnen Schlüsse auf die ein Ereigniss bestimmenden Ursachen und auf die Wiederkehr des Ereignisses zu ziehen sucht, ist die Statistik.

Anm. So kann man z. B. aus einem einzigen in irgend einem Lande vorgekommenen Verbrechen keinen Schluss ziehen auf die Verbreitung desjenigen sittlichen Mangels, aus welchem das Verbrechen hervorging. Wenn aber unter n innerhalb eines Jahres in diesem Lande vorgekommenen Verbrechen verschiedener Art die eine a_1 mal, die andre a_2 mal u. s. w. vorkam, so wird man schliessen, dass die zu Grunde liegenden Ursachen sich ebenso verhalten wie diese Zahlen. Und wenn in einer Reihe aufeinanderfolgender Jahre diese Zahlen sich im Verhältniss zur Bevölkerungszahl nicht wesentlich ändern, so wird man sagen können, dass die Bevölkerung im Ganzen in demselben Verhältniss zu diesen Verbrechen hinneige, wie es jene Zahlen x angeben. Dasselbe gilt von Krankheiten, von der Wahl des Berufes, von Abstimmungen, u. s. w., und zwar nicht nur im Umfange eines ganzen Landes, sondern auch in kleineren Bezirken. Andre Beispiele bieten: die an einem bestimmten Orte während eines Jahres beobachteten Windrichtungen, Gewitter, Regenfälle, Temperaturen. Ferner: Höhe der Ein- und Ausfuhr von Producten, Einnahmen und Ausgaben, Steuer-Erträge während eines Jahres. — Alle so gewonnenen Resultate lassen sich zu muthmasslichen Vorherbestimmungen benutzen.

191. Wahrscheinlichkeit durch Berechnung. — Waren bis jetzt die Ereignisse gegeben, ihre Ursachen aber unbekannt, so können umgekehrt die Ursachen gegeben sein, und es lässt

sich dann aus der Stärke der Ursachen auf die Häufigkeit der durch dieselben hervorgerufenen Ereignisse schliessen. In diesem Falle sind also $a_1, a_2, \dots a_p$ keine Näherungswerthe, sondern bestimmte Zahlen, und ebenso hat $\frac{a_r}{n}$, die Wahrscheinlichkeit des r^{ten} Ereignisses, einen genauen Werth. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses wird hier durch Vorausberechnung, ohne dass dasselbe schon stattgefunden hat, ermittelt (a priori). Soll diese Berechnung aber möglich sein, so muss für jedes Ereigniss eine Anzahl von Fällen gegeben sein, welche dieses Ereigniss hervorrufen, und die Zahlen $a_1, a_2 \dots a_p$, welche diese Anzahl für jedes Ereigniss angeben, müssen zusammen alle möglichen Fälle umfassen. Die Wissenschaft, welche lehrt, alle in Bezug auf ein Ereigniss möglichen Fälle aufzustellen und die dem Ereigniss günstigen Fälle zu bestimmen, ist die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Anm. So ist, wenn aus einem Spiel Karten ein Bild gezogen werden soll, die Zahl der möglichen Fälle gleich der Anzahl der Karten, die Zahl der günstigen Fälle gleich der Anzahl der Bilder. Andre Beispiele bieten: Das Werfen mit Würfeln, das Ziehen eines Looses, das Wetten (wobei die Einsätze der Parteien sich verhalten müssen wie die durch Rechnung oder durch Schätzung bestimmten Wahrscheinlichkeiten des Gewinnes).

Die Richtigkeit der durch Rechnung gefundenen Wahrscheinlichkeit kann durch Versuche (d. h. dadurch, dass man die Ereignisse wirklich hervorrufft) geprüft werden. Hat man also als Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses den Quotienten $\frac{a_r}{n}$ gefunden, so muss unter $p \cdot n$ Versuchen das Ereigniss $p \cdot a_r$ mal eintreten, und zwar muss dies Resultat um so genauer zutreffen, je grösser p ist. Widerspricht das Resultat der Versuche dem durch Berechnung gefundenen, so folgt, dass die Zahl a_r nicht die Stärke der das Ereigniss hervorrufenden Ursache ausdrückt, dass also Ursachen wirksam sind, die man vorher nicht in Rechnung gezogen hatte. So kann also die Vergleichung der durch Berechnung und der durch Beobachtung gewonnenen Resultate zur Ermittlung unbekannter Ursachen dienen.

Anm. So ist z. B. beim Werfen mit einem Würfel die Wahrscheinlichkeit für alle Würfe von 1 bis 6 dieselbe. Es wird daher ein bestimmter Wurf, z. B. 6, unter 6 Würfeln durchschnittlich einmal, unter $6p$ Würfeln nahezu p mal vorkommen. Findet dieser Wurf aber viel öfter statt, so wird man schliessen, dass der Würfel gefälscht ist, d. h. dass eine bei der Rechnung nicht in Betracht gezogene Ursache die Wahrscheinlichkeit für den Wurf 6 erhöht hat.

Umgekehrt kann die Vermuthung, dass einem Ereigniss besondere Ursachen, die sich der Wahrnehmung entziehen, zu Grunde liegen, durch nachträgliche Berechnung der Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses geprüft werden. Fällt diese Wahrscheinlichkeit sehr gering aus, so wird die Vermuthung für begründet erachtet werden.

Anm. So wird man z. B., wenn man auf einem Tische 6 Würfel findet, die alle auf der oberen Seite eine Eins zeigen, auch ohne Berechnung schon vermuthen, dass diese Zusammenstellung nicht das Resultat eines Wurfes, sondern einer absichtlichen Anordnung sei. — Noch mehr wird eine solche Vermuthung bestärkt, wenn die Möglichkeit wiederholter Versuche ausgeschlossen ist. Beispiele der Art bieten u. A.: die grosse Anzahl der Doppelsterne, welche auf die begründete Vermuthung geführt hat, dass viele dieser Sternpaare nicht zufällig für unser Auge beisammenstehen, sondern wirklich zusammengehören; ferner die geringe Neigung der Planetenbahnen gegen die Ekliptik, u. s. w.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses kann sowohl für den Fall eines, wie für den Fall mehrerer Versuche bestimmt werden. Man unterscheidet hiernach Wahrscheinlichkeit für einen und für mehrere Fälle.

Es kann sich ferner handeln um die Wahrscheinlichkeit eines oder mehrerer Ereignisse. Hiernach unterscheidet man einfache und combinirte Wahrscheinlichkeit.

Im letzteren Falle kann entweder der einzelne Eintritt irgend eines der Ereignisse, oder das Zusammentreffen aller als günstiger Fall betrachtet werden. Hiernach unterscheidet man getrennte und zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit mehrerer Ereignisse.

A. Wahrscheinlichkeit für einen Fall.

a. Einfache Wahrscheinlichkeit.

192. Erklärung. — Unter der mathematischen Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses versteht man den Quotienten aus der Anzahl der das Ereigniss hervorrufenden Fälle, und der Anzahl aller in Bezug auf das Ereigniss möglichen Fälle.

193. Folgerungen. — Die Wahrscheinlichkeit ist im Allgemeinen ein echter Bruch. Ihre Grenzwerte sind 1 und 0. Die Wahrscheinlichkeit 1 bedeutet die Gewissheit des Eintretens, die Wahrscheinlichkeit 0 die Gewissheit des Nicht-Eintretens des Ereignisses. — Ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses a , so ist $1 - a$ die dem Ereigniss entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit.

Alle die Ermittlung der einfachen Wahrscheinlichkeit betreffenden Aufgaben lassen sich auf eine allgemeine Form bringen. Ist das Ereigniss ein einfaches, so kann man sein Eintreten durch die Wahl eines Elementes aus einer grösseren Anzahl (durch das Ziehen eines Looses) darstellen. Ist das Ereigniss ein zusammengesetztes, so kann man die Aufgabe in die Form einkleiden: mit einer Anzahl Würfel von bestimmter Felderzahl eine gegebene Summe zu werfen.

194. α . Einfache Ereignisse.

1) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, aus n gegebenen Elementen ein vorher bestimmtes zu wählen?

Die Anzahl der möglichen Fälle ist n , die der günstigen 1; also

$$194. \quad w = \frac{1}{n}.$$

2) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, aus n gegebenen Elementen k vorher bestimmte zu wählen?

Die k vorherbestimmten Elemente bilden eine Combination zur k^{ten} Classe aus n Elementen. Die Anzahl aller dieser Combinationen ist die Zahl der möglichen Fälle. Sie ist (nach 188) $n \cdot k$. Die Zahl der günstigen Fälle ist 1; also ist

$$195. \quad w = \frac{1}{n \cdot k}.$$

Anm. Sollen die k vorher bestimmten Elemente noch in bestimmter Reihenfolge erscheinen, so bilden sie eine Variation zur k^{ten} Classe aus n Elementen. Mithin ist, da die Anzahl aller dieser Variationen (nach 190) $n \cdot k \cdot k!$ beträgt,

$$196. \quad w = \frac{1}{n \cdot k \cdot k!}.$$

3) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass, wenn von n Elementen k gewählt werden, h vorher bestimmte dabei sind?

Würden nur h Elemente gewählt, so wäre die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n \cdot h}$. Es sind aber ausser diesen vorherbestimmten

h Elementen noch $(k - h)$ andre beliebig zu wählen, und zwar aus den $(n - h)$ noch übrigen Elementen. Diese Wahl kann in sovielfacher Weise stattfinden, als Combinationen zur $(k - h)^{\text{ten}}$ Classe aus $(n - h)$ Elementen existiren. Jede dieser $(n - h) \cdot (k - h)$ Combinationen giebt, mit den h vorher bestimmten Elementen verbunden, einen günstigen Fall. Die Anzahl der günstigen

Fälle ist also $(n-h) \cdot (k-h)$. Die Anzahl der möglichen Fälle ist, wie in 2) $n \cdot k$; mithin

$$w = \frac{(n-h) \cdot (k-h)}{n \cdot k}.$$

197.

4) Unter n Elementen sind p von einer bestimmten Sorte. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass, wenn k Elemente gewählt werden, h von jener Sorte dabei sind?

Ausser den h vorher bestimmten Elementen sind, wie im vorigen Falle, $(k-h)$ beliebige Elemente zu wählen. Die Wahl derselben findet aber diesmal nicht aus $(n-h)$, sondern aus $(n-p)$ Elementen statt (weil unter den $k-h$ beliebigen Elementen keins der p Elemente von der bestimmten Sorte sich befinden darf). Demnach würde $w = \frac{(n-p) \cdot (k-h)}{n \cdot k}$ sein. — Nun

sind aber nicht, wie im vorigen Falle, h bestimmte Elemente zu wählen, sondern diese können wieder beliebig aus den p Elementen der bestimmten Sorte gewählt werden. Die Zahl der günstigen Fälle in der eben aufgestellten Formel ist also mit der Anzahl der Combinationen aus p Elementen zur h^{ten} Classe zu multipliciren (weil in dieser Formel nur eine dieser Combinationen vorausgesetzt ist). Demnach ist

$$w = \frac{(n-p) \cdot (k-h) \cdot p \cdot h}{n \cdot k}.$$

198.

Anm. Ist $k > p$, so stellen die Fälle $h=0, 1, 2, \dots, p$ zusammen alle möglichen Fälle dar; d. h.: die Summe aller Zähler der durch diese Annahmen aus w entstandenen Brüche ist gleich dem gemeinsamen Nenner, oder (mit Benutzung von 131 und 132):

$$(n-p) \cdot k + p \cdot 1 \cdot (n-p) \cdot (k-1) + p \cdot 2 \cdot (n-p) \cdot (k-2) + \dots + (n-p) \cdot (k-p) = n \cdot k.$$

Diese Formel ist mit 137 identisch, in deren Gestalt sie durch die Substitutionen $k=n$; $n=a+b$; $p=b$ übergeht.

5) Unter n Elementen sind p_1 von der ersten, p_2 von der zweiten, $\dots, p_r$ von der r^{ten} Sorte. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass, wenn k Elemente gewählt werden, h_1 von der ersten, h_2 von der zweiten, $\dots, h_r$ von der r^{ten} Sorte dabei sind?

Da alle Elemente, die in keiner der verlangten Sorten vorhanden sind, zusammen als eine neue Sorte betrachtet werden können, so kann man, ohne der Allgemeinheit der Aufgabe zu schaden, annehmen, dass

$$p_1 + p_2 + \dots + p_r = n; \quad h_1 + h_2 + \dots + h_r = k$$

sei, d. h. dass die r Sorten alle n Elemente erschöpfen. — Für 2 Sorten würde Formel 198 in der neuen Bezeichnung lauten:

$$w = \frac{p_1^{h_1} \cdot p_2^{h_2}}{n^k}.$$

Die Wiederholung der im vorigen Fall angestellten Betrachtung zeigt, dass nun allgemein die Formel gilt:

199.
$$w = \frac{p_1^{h_1} \cdot p_2^{h_2} \cdot \dots \cdot p_r^{h_r}}{n^k}.$$

Anm. Aus 199 folgt 198, wenn $r=2$, aus 198 folgt 197, wenn $p=h$, aus 197 folgt 195, wenn $h=k$, aus 195 endlich folgt 194, wenn $k=1$ gesetzt wird. Jede der Formeln 195, 197, 198, 199 ist also ein specieller Fall der folgenden.

195. β . Zusammengesetzte Ereignisse.

Im Folgenden wird, wenn nichts andres bestimmt ist, die Anzahl der Felder eines Würfels zu 6 angenommen.

1) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit *einem* Würfel die Summe s zu werfen?

Die Anzahl der möglichen Fälle ist 6, die der günstigen (unter der Voraussetzung, dass s eine der Zahlen 1 bis 6 ist) ist 1; also

200.
$$w = \frac{1}{6}.$$

Die Wahrscheinlichkeit ist also, ebenso wie die Anzahl der günstigen Fälle, für jeden Werth von s , von 1 bis 6, gleich.

Stellt man den Ausdruck auf:

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6,$$

so giebt der Factor jeder Potenz von x (nämlich 1) die Anzahl der für den zugehörigen Exponenten günstigen Fälle an (wenn man sich nämlich unter dem Exponenten die zu werfende Summe denkt).

2) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit *zwei* Würfeln die Summe s zu werfen?

Die Anzahl der möglichen Fälle ist 6^2 , da jedes Feld des ersten mit jedem des zweiten Würfels zusammentreffen kann. Die Anzahl der günstigen Fälle ist jedoch für verschiedene Werthe von s (von 2 bis 12) verschieden. Denn es kann jede der folgenden Summen durch die darunter stehenden Combinationen hervorgebracht werden:

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
11	12	13	14	15	16	26	36	46	56	66
	21	22	23	24	25	35	45	55	65	
		31	32	33	34	44	54	64		
			41	42	43	53	63			
				51	52	62				
					61					
1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Die Zahl der günstigen Fälle beträgt also 1 für $s=2$, 2 für $s=3$, u. s. w. Denkt man sich nun zu jedem Elemente in den eben aufgestellten Combinationen als Exponent die Grundzahl x hinzugefügt (sodass z. B. 32 in x^3x^2 übergeht), denkt man sich ferner alle diese neuen Elemente in jeder Combination als Factoren, die Combinationen selbst aber als Summanden, so ist der hierdurch entstehende Ausdruck derselbe, welcher aus der Multiplication des Ausdrucks $x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$ mit sich selbst hervorgeht. Und wiederum giebt, wie im vorigen Falle, der Factor jeder Potenz von x die Anzahl der für den zugehörigen Exponenten günstigen Fälle an. Man hat also diese Zahl dem Ausdrücke

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2$$

zu entnehmen.

3) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit n Würfeln die Summe s zu werfen?

Die Anzahl der möglichen Fälle ist 6^n . Die Anzahl der günstigen Fälle ist, ähnlich wie vorher, die Anzahl der Combinationen mit Wiederholung zur Summe s aus den Elementen 1 bis 6. Alle diese Combinationen entstehen, wenn man $(x + x^2 + \dots + x^6)^n$ entwickelt, und diejenigen Glieder herausnimmt, deren Exponentensumme s ist. Mithin ist (ähnlich wie vorher) die Anzahl der günstigen Fälle gleich dem Factor von x^s in der Entwicklung des Ausdrucks

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^n.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 &= x(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5) \\ &= \frac{x(1 - x^6)}{1 - x}; \\ &= x(1 - x^6)(1 - x)^{-1}; \end{aligned} \quad (147.)$$

also

$$\begin{aligned}
 & (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^n = x^n (1 - x^6)^n (1 - x)^{-n} \\
 & = x^n [1 - n \cdot 1 x^6 + n \cdot 2 x^{12} - n \cdot 3 x^{18} + \dots] \\
 & \quad \cdot [1 + n \cdot 1 x + (n + 1) \cdot 2 x^2 + (n + 2) \cdot 3 x^3 + \dots] \\
 & = [1 - n \cdot 1 x^6 + n \cdot 2 x^{12} - n \cdot 3 x^{18} + \dots] \\
 & \quad \cdot [x^n + n \cdot 1 x^{n+1} + (n + 1) \cdot 2 x^{n+2} + (n + 2) \cdot 3 x^{n+3} + \dots]
 \end{aligned}$$

(nach 193 und 193a). Aus dem durch Lösung der Klammern rechts entstehenden Polynome sind nun alle diejenigen Glieder herauszunehmen, welche den Factor x^s enthalten. Es entsteht aber x^s durch Multiplication der folgenden Glieder beider Polynome (abgesehen von den Coefficienten):

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 1 & x^6 & x^{12} & \dots & x^{6r} & \dots \\
 x^s & x^{s-6} & x^{s-12} & \dots & x^{s-6r} & \dots
 \end{array}$$

Im ersten Polynom sind die Coefficienten der hier stehenden Glieder der Reihe nach

$$1, \quad n \cdot 1, \quad n \cdot 2, \quad \dots \quad n \cdot r \quad \dots$$

Im zweiten Polynom ist der Coefficient von x^{n+k} die Zahl $(n + k - 1) \cdot k$; mithin ist der Coefficient von $x^{n+(s-n)}$ oder von x^s die Zahl $(s - 1) \cdot (s - n)$, welche man erhält, wenn man $k = s - n$ setzt. Setzt man im letzteren Ausdruck für s der Reihe nach $s - 6, s - 12, \dots$, so erhält man die zu den oben aufgestellten Gliedern gehörige Coefficientenreihe:

$$(s - 1) \cdot (s - n), (s - 7) \cdot (s - n - 6), (s - 13) \cdot (s - n - 12) \dots (s - 1 - 6r) \cdot (s - n - 6r) \dots$$

Die Anzahl der günstigen Fälle ist nun gleich der Summe der Producte aus je zwei entsprechenden Gliedern der beiden Coefficientenreihen, nämlich gleich

$$(s - 1) \cdot (s - n) + n \cdot 1 \cdot (s - 7) \cdot (s - n - 6) + n \cdot 2 \cdot (s - 13) \cdot (s - n - 12) + \dots$$

Demnach ist schliesslich die Wahrscheinlichkeit, mit n Würfeln die Summe s zu werfen, durch die Formel gegeben:

$$201. \quad w = \frac{1}{6^n} [(s - 1) \cdot (s - n) + n \cdot 1 \cdot (s - 7) \cdot (s - n - 6) + n \cdot 2 \cdot (s - 13) \cdot (s - n - 12) + \dots].$$

4) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit n Würfeln, deren jeder k Felder hat, die Summe s zu werfen?

Man hat nur in der vorigen Formel die Zahl 6 überall durch k zu ersetzen, und erhält:

$$w = \frac{1}{k^n} [(s-1)^{\cdot(s-n)} + n^{\cdot 1} \cdot (s-1-k)^{\cdot(s-n-k)} + n^{\cdot 2} \cdot (s-1-2k)^{\cdot(s-n-2k)} + \dots]. \quad 202.$$

Die Reihe ist so lange fortzusetzen als $s - n - rk$ positiv bleibt.

b. Combinirte Wahrscheinlichkeit.

196. Getrennte Wahrscheinlichkeit. — Sind $\frac{a_1}{a}$ und $\frac{a_2}{a}$ die Wahrscheinlichkeiten für zwei Ereignisse, die durch denselben Versuch entstehen können, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass eins dieser Ereignisse eintritt, gleich $\frac{a_1 + a_2}{a}$, weil die Anzahl der günstigen Fälle jetzt $a_1 + a_2$ ist. Setzen wir also

$$\frac{a_1}{a} = w_1; \quad \frac{a_2}{a} = w_2,$$

so ist die Wahrscheinlichkeit

$$w = w_1 + w_2.$$

Wenn ferner $w_1, w_2, \dots, w_n$ die Wahrscheinlichkeiten für n Ereignisse sind, die alle durch denselben Versuch entstehen können, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten irgend eines dieser Ereignisse,

$$w = w_1 + w_2 + \dots + w_n. \quad 203.$$

In Worten?

Anm. Die Bedingung, dass die n Ereignisse durch denselben Versuch entstehen können, ist unerlässlich. Denn wenn z. B. in einem Gefäss 1 weisse und 2 schwarze Kugeln, in einem andern 1 weisser und 2 schwarze Würfel sich befinden, so ist die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel zu ziehen, gleich $\frac{2}{3}$, und ebenso gross die Wahrscheinlichkeit für einen schwarzen Würfel. Hieraus darf man nun nicht schliessen, dass die Wahrscheinlichkeit, eine schwarze Kugel oder einen schwarzen Würfel zu ziehen, gleich $\frac{4}{3}$ sei (was ohnehin, da w nicht > 1 sein kann, keinen Sinn geben würde); denn es sind, um Kugeln und Würfel zu berücksichtigen, 2 Versuche nöthig, nämlich in jedes Gefäss ein Griff. Befinden sich dagegen Kugeln und Würfel in demselben Gefäss, so ist jede der beiden Wahrscheinlichkeiten (für eine schwarze Kugel und einen schwarzen Würfel) gleich $\frac{2}{6}$; mithin die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen einer schwarzen Kugel oder eines schwarzen Würfels gleich $\frac{2}{3}$. — Umfassen die n Ereignisse alle möglichen Fälle, so ist natürlich $w = 1$.

197. Zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit. — Sollen zwei Ereignisse, deren einzelne Wahrscheinlichkeiten $\frac{a_1}{b_1}$ und $\frac{a_2}{b_2}$ sind, zusammen oder in bestimmter Reihenfolge nach einander eintreten, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für dieses Zusammentreffen durch folgende Betrachtung. Da jeder der in Bezug auf das erste Ereigniss möglichen Fälle mit jedem der das zweite Ereigniss betreffenden zusammentreffen kann, so ist die Anzahl der möglichen Fälle $b_1 b_2$. Ferner giebt jeder der günstigen Fälle des ersten mit jedem der günstigen Fälle des zweiten Ereignisses zusammen einen für das Zusammentreffen günstigen Fall. Die Anzahl der günstigen Fälle ist daher $a_1 a_2$. Und die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen beider Ereignisse ist: $w = \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2}$, oder, wenn wir $w_1 = \frac{a_1}{b_1}$; $w_2 = \frac{a_2}{b_2}$ setzen:

$$w = w_1 \cdot w_2.$$

Ebenso ist die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen von n Ereignissen, deren einzelne Wahrscheinlichkeiten $w_1, w_2, \dots, w_n$ sind:

204. $w = w_1 \cdot w_2 \cdot \dots \cdot w_n.$

In Worten?

Soll ein Ereigniss, dessen Wahrscheinlichkeit $w_1 = \frac{a}{b}$ ist, n mal nach einander eintreffen, so ist in Formel 204 nur $w_1 = w_2 = \dots = w_n$ zu setzen, und man erhält

205. $w = w_1^n = \frac{a^n}{b^n}.$

Mitunter jedoch vermindert sich mit dem jedesmaligen Eintreten des Ereignisses die Anzahl der möglichen und die der günstigen Fälle um je 1; dann ist:

206. $w = \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)}{b(b-1)(b-2)\dots(b-n+1)}$

oder (nach 128):

$$w = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}.$$

Soll von mehreren Ereignissen, deren Wahrscheinlichkeiten $w_1 = \frac{a_1}{b_1}$; $w_2 = \frac{a_2}{b_2}$... sind, das erste n_1 mal, das zweite n_2 mal, etc. eintreffen, so ist die Wahrscheinlichkeit, je nachdem die

Zahl der möglichen und die der günstigen Fälle nach jedem Eintritt ungeändert bleibt, oder sich um 1 vermindert:

$$w = \frac{a_1^{n_1}}{b_1^{n_1}} \cdot \frac{a_2^{n_2}}{b_2^{n_2}} \dots \quad 207.$$

oder:

$$w = \frac{a_1^{n_1}}{b_1^{n_1}} \cdot \frac{a_2^{n_2}}{b_2^{n_2}} \dots \quad 208.$$

Anm. Hiernach ist die getrennte Wahrscheinlichkeit mehrerer Ereignisse grösser, dagegen die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit kleiner als die Wahrscheinlichkeit jedes einzelnen der Ereignisse. — Ist die Reihenfolge der verschiedenen Ereignisse eine beliebige, so hat man in den Formeln 204, 207, 208 die rechte Seite noch mit der Permutationszahl der verlangten Ereignisse zu multipliciren. — Bei der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit wird die Reihe der verlangten Ereignisse als ein einziges zusammengesetztes Ereigniss, und folglich die Reihe der die Ereignisse hervorrufenden Versuche als ein einziger Versuch betrachtet.

B. Wahrscheinlichkeit für mehrere Fälle.

198. Vorbemerkung. — Bisher wurde angenommen, dass zur Herbeiführung eines einfachen oder zusammengesetzten Ereignisses nur ein einziger Versuch gemacht würde, und für diesen einen Versuch wurde die Wahrscheinlichkeit des Gelingens berechnet. Wenn dagegen eine Reihe von Versuchen angestellt wird, so wird die Wahrscheinlichkeit des Gelingens mit jedem Versuche steigen, und man kann entweder fragen, wie gross die Wahrscheinlichkeit des Gelingens bei n Versuchen ist, oder, wie viele Versuche man anstellen muss, damit von vornherein die Wahrscheinlichkeit des Gelingens gleich einer gegebenen Zahl w sei.

1) Wenn die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses für den ersten Versuch w_1 ist, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dasselbe spätestens beim n^{ten} Versuch eintritt?

Wir berechnen zuerst die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit. Dieselbe beträgt für den ersten Versuch (vgl. Nr. 193) $1 - w_1$; mithin für die n ersten Versuche (nach 205) $(1 - w_1)^n$. Dies ist also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereigniss n mal hintereinander ausbleibt. Die hierzu entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit umfasst offenbar alle dem früheren Eintreten des Ereignisses günstigen Fälle; mithin ist, wenn wir dieselbe mit w bezeichnen,

$$w = 1 - (1 - w_1)^n. \quad 209.$$

Ist w gegeben, und n gesucht, so folgt aus dieser Formel:

$$n = \frac{l(1-w)}{l(1-w_1)}.$$

2) Wenn die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses für den ersten Versuch w_1 ist, wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dasselbe bei n Versuchen k mal eintrifft?

Die Wahrscheinlichkeit, dass k Versuche günstig ausfallen, ist w_1^k (205); diejenige, dass $(n-k)$ Versuche ungünstig ausfallen, ist $(1-w_1)^{n-k}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass k günstige Versuche mit $(n-k)$ ungünstigen zusammentreffen, ist $w_1^k \cdot (1-w_1)^{n-k}$ (204). Nun kann dieses Zusammentreffen aber in soviel verschiedenen Reihenfolgen stattfinden, als die Anzahl der Permutationen von n Elementen beträgt, unter denen k von der einen und $(n-k)$ von der andern Art unter einander gleich sind. Mit dieser Permutationszahl ist also die gefundene Wahrscheinlichkeit noch zu multipliciren. Diese Permutationszahl ist nun $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ (nach 187) oder $n \cdot k$ (nach 187a). Mithin ist, wenn wir die gesuchte Wahrscheinlichkeit mit w bezeichnen:

$$210. \quad w = n \cdot k \cdot w_1^k (1-w_1)^{n-k}.$$

Anm. Die Fälle $k=0, 1, 2, \dots, n$ stellen zusammen alle möglichen Fälle dar: mithin ist die Summe aller diesen Fällen entsprechenden Wahrscheinlichkeiten gleich 1, oder:

$$210a. \quad (1-w_1)^n + n \cdot w_1^1 (1-w_1)^{n-1} + n \cdot w_1^2 (1-w_1)^{n-2} + \dots + w_1^n = 1.$$

Diese Formel ist mit 192 identisch, in deren Gestalt sie durch die Substitutionen $(1-w_1) = x$; $w_1 = a$ übergeht.

Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereigniss wenigstens k mal eintrifft, erhält man durch Addition aller Werthe für w von $k=k$ bis $k=n$; die Wahrscheinlichkeit, dass es höchstens k mal eintrifft, durch Addition aller Werthe für w von $k=0$ bis $k=k$.

Ist im ersteren Falle $k=1$, so ist die Aufgabe offenbar mit der unter 1) gelösten identisch. Da man alsdann von $k=1$ bis $k=n$ zu addiren hat, so ist

$$w = n \cdot w_1^1 (1-w_1)^{n-1} + n \cdot w_1^2 (1-w_1)^{n-2} + \dots + w_1^n;$$

d. h. (nach 210a)

$$w = 1 - (1-w_1)^n,$$

übereinstimmend mit 209.

(Aufgaben: Hofmann 3. Siebzehnter Abschn. 101—114. — Bardey XXXVI.)

Uebersicht der Formeln und Regeln.

(Zur Wiederholung.)

Reine Arithmetik.

Einleitung.

1. Von zwei gleichen Zahlen kann man die eine an die Stelle der anderen setzen.
2. Sind zwei Zahlen derselben dritten gleich, so sind sie unter einander gleich.

Die einfachen Zahlen.

A. Die absoluten Zahlen.

1. Addition.

3. $a + b = b + a$. (Vertauschung.)
4. $(a + b) + c = a + (b + c)$. (Zusammenfassung.)
5. Die Summe ist grösser als jeder Summand.
6. Gleiches zu Gleichem addirt, giebt Gleiches.
7. $a + (b + c) = a + b + c$. (Summe addirt.)
8. $(a + b) + c = (a + c) + b$. (Reihenf.)

2. Subtraction.

9. Gleiches von Gleichem subtrahirt, giebt Gleiches.
10. $(c \mp b) \pm b = c$.
11. $a + (x - c) = a + x - c$. (Diff. add.)
12. $(x + a) - c = (x - c) + a$. (Reihenf.)
13. $a - (b + c) = a - b - c$. (Summe sbtr.)
14. $(a - b) - c = (a - c) - b$. (Reihenf.)
15. $a - (x - c) = a - x + c$. (Diff. subtr.)

16. Eine Plusklammer kann beliebig gesetzt und weggelassen werden, eine Minusklammer nur dann, wenn man gleichzeitig alle in der Klammer stehenden Plus- und Minuszeichen umkehrt.

3. Multiplication.

17. $ab = b + b + \dots$ (a mal).
18. $ab = ba$. (Vertauschung.)
19. $(ab)c = a(bc)$. (Zusammenfass.)
20. Das Product ist grösser als jeder Factor und ein Vielfaches jedes Factors.
21. Gleiches mit Gleichem multiplicirt, giebt Gleiches.
22. $(a + b)c = ac + bc$. (Summe mltpl.)
23. $(x - b)c = xc - bc$. (Diff. multipl.)
24. Heraussetzung d. gem. Factors.
25. $(a + b)(d \pm e) = ad + bd \pm ae \pm be$.
 $(x - b)(d \pm e) = xd - bd \pm xe \mp be$.
26. $a(bc) = abc$. (Product multipl.)
27. $(ab)c = (ac)b$. (Reihenfolge.)

4. Division.

28. Gleiches durch Gleiches dividirt, giebt Gleiches.
29. $\frac{c}{b} \cdot b = c$; $\frac{ab}{b} = a$.
30. $\frac{x + y}{c} = \frac{x}{c} + \frac{y}{c}$. (Summe divid.)

$$31. \frac{z-y}{c} = \frac{z}{c} - \frac{y}{c}. \text{ (Diff. dividirt.)}$$

32. Addit. und Subtract. von Quotienten mit gleichem Divisor.

$$33. a \cdot \frac{x}{c} = \frac{ax}{c}. \text{ (Mult. mit Quot.)}$$

$$34. \frac{xa}{c} = \frac{x}{c} \cdot a. \text{ (Reihenfolge.)}$$

$$35. \frac{a}{bc} = \frac{a|b}{c}. \text{ (Divis. durch Prod.)}$$

$$36. \frac{a|b}{c} = \frac{a|c}{b}. \text{ (Reihenfolge.)}$$

$$37. \frac{a}{x|c} = \frac{a}{x} \cdot c. \text{ (Divis. durch Quot.)}$$

5. Potenzirung.

$$38. b^a = b \cdot b \cdot b \dots (a \text{ mal}).$$

39. Die Potenz ist grösser als die Grundzahl, ist ein Vielfaches derselben, und besteht aus lauter gleichen Factoren von der Grösse der Grundzahl.

40. Gleiches mit Gleichem potenzirt, giebt Gleiches.

$$41. c^a \cdot c^b = c^{a+b}. \text{ (Potenz. m. Summe.)}$$

$$42. \frac{c^x}{c^b} = c^{x-b}. \text{ (Potenzir. mit Diff.)}$$

43. Multiplication und Division von Potenzen m. gleicher Grundzahl.

$$44. (a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2. \\ (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

$$45. (a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

$$45a. a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1} = \frac{a^n - b^n}{a - b}.$$

$$45b. (a+b+c+d+\dots)^2 = ?$$

$$46. (ab)^c = a^c b^c. \text{ (Product potenzirt.)}$$

$$47. \left(\frac{x}{b}\right)^c = \frac{x^c}{b^c}. \text{ (Quotient potenz.)}$$

48. Multiplication und Division von Potenzen mit gleichen Exponenten.

$$49. (c^a)^b = c^{ab}. \text{ (Potenz potenzirt.)}$$

$$50. (c^a)^b = (c^b)^a. \text{ (Reihenfolge.)}$$

6. Radicirung.

51. Gleiches mit Gleichem radicirt, giebt Gleiches.

$$52. \left(\sqrt[a]{c}\right)^a = c; \sqrt[a]{b^a} = b.$$

$$53. \sqrt[c]{xy} = \sqrt[c]{x} \cdot \sqrt[c]{y}. \text{ (Prod. radic.)}$$

$$54. \sqrt[c]{\frac{z}{y}} = \frac{\sqrt[c]{z}}{\sqrt[c]{y}}. \text{ (Quot. radicirt.)}$$

55. Multiplication und Division von Wurzeln mit gleichen Exponenten.

$$56. \sqrt[b]{c^x} = c^{\frac{x}{b}}. \text{ (Potenz radicirt.)}$$

$$57. \left(\sqrt[x]{y}\right)^a = \sqrt[\frac{a}{x}]{y}. \text{ (Wurzel potenz.)}$$

$$58. \left(\sqrt[a]{y}\right)^x = \sqrt[\frac{x}{a}]{y^x}. \text{ (Reihenfolge.)}$$

$$59. \sqrt[a]{\sqrt[b]{y}} = \sqrt[\frac{ab}{a}]{y}. \text{ (Wurzel radic.)}$$

$$60. \sqrt[a]{\sqrt[b]{y}} = \sqrt[\frac{b}{a}]{\sqrt[a]{y}}. \text{ (Reihenf.)}$$

7. Logarithmirung.

61. Gleiches mit Gleichem logarithmirt, giebt Gleiches.

$$62. {}^b\log c = c; {}^b\log(b^a) = a.$$

$$63. {}^c\log(xy) = {}^c\log x + {}^c\log y. \text{ (Product log.)}$$

$$64. {}^c l\left(\frac{z}{y}\right) = {}^c l_z - {}^c l_y. \text{ (Quot. log.)}$$

65. Addition und Subtraction von Logarithmen mit gleicher Grundzahl.

$$66. {}^c l(x^b) = b \cdot {}^c l_x. \text{ (Potenz log.)}$$

$$67. {}^c l(\sqrt[b]{y}) = \frac{{}^c l_y}{b}. \text{ (Wurzel log.)}$$

B. Die relativen Zahlen.

1. Die Null.

$$68. a \pm 0 = a.$$

$$69. 0 \cdot c = 0; 0 : c = 0.$$

$$70. 0^n = 0; \sqrt[n]{0} = 0.$$

$$71. \frac{0}{0} = c; {}^0 l 0 = n.$$

2. Die negativen Zahlen.

$$72. a \pm (-c) = a \mp c.$$

$$73. \begin{array}{l} +b \pm c = +(b \pm c) \\ -b \pm c = -(b \mp c) \end{array} \text{ (Vereinigung.)}$$

$$74. (-b)c = -bc; \frac{-y}{c} = -\frac{y}{c}.$$

75. Product und Quotient zweier gleichstimmiger Zahlen sind positiv, zweier entgegengesetzter negativ.

76. Alle geraden Potenzen einer negativen Zahl sind positiv, alle ungeraden negativ.

3. Die Eins.

$$77. a \cdot 1 = \frac{a}{1} = a.$$

$$78. c^0 = 1.$$

$$79. 1^c = 1.$$

$$80. c^1 = c.$$

$$81. {}^c l 1 = 0.$$

$$82. \sqrt[0]{1} = c; {}^1 l 1 = c.$$

$$83. {}^c l c = 1.$$

4. Die umgekehrten Zahlen.

$$83a. \frac{a}{c} = a \cdot \frac{1}{c} \text{ (Quot. = Prod.)}$$

$$83b. \sqrt[b]{c} = c^{\frac{1}{b}} \text{ (Wurzel = Potenz).}$$

$$84. c^{-b} = \frac{1}{c^b} = \left(\frac{1}{c}\right)^b.$$

Die zusammengesetzten Zahlen.

A. Die Polynome.

85. Addition. Beispiel:

$$\begin{array}{r} 3-4x+7x^2 \\ 5+9x-11x^2 \\ \hline 8+5x-4x^2. \end{array}$$

86. Subtraction. Beispiel:

$$\begin{array}{r} 3-4x+7x^2 \\ \mp 5 \mp 9x \pm 11x^2 \\ \hline -2-13x+18x^2. \end{array}$$

87. Multiplication. Beispiel:

$$\begin{array}{r} 3-4x+7x^2 \\ 5+9x-11x^2 \\ \hline 15-20x+35x^2 \\ +27x-36x^2+63x^3 \\ -33x^2+44x^3-77x^4 \\ \hline 15+7x-34x^2+107x^3-77x^4. \end{array}$$

88. Division. Beispiel:

$$\begin{array}{l} \text{Dvs: } 5+9x-11x^2 \mid \text{Q: } 3-4x+7x^2 \\ \text{Dvd: } 15+7x-34x^2+107x^3-77x^4 \\ \quad \mp 15 \mp 27x \pm 33x^2 \\ \hline \quad \quad -20x - x^2 + 107x^3 \\ \quad \quad \pm 20x \pm 36x^2 \mp 44x^3 \\ \hline \quad \quad \quad +35x^2 + 63x^3 - 77x^4 \\ \quad \quad \quad \mp 35x^2 \mp 63x^3 \pm 77x^4 \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0. \end{array}$$

89. Das Quadrat eines Polynoms ist gleich der Summe der Quadrate aller Glieder, vermehrt um die doppelten Producte je zweier.

90. Radicirung mit 2. Beispiel:

$$\begin{array}{r} 3 - 4x + 7x^2 = \\ \sqrt{9 - 24x + 58x^2 - 56x^3 + 49x^4} \\ 9 \\ 6 - 4x \overline{) -24x + 58x^2} \\ \underline{\pm 24x \mp 16x^2} \\ 6 - 8x + 7x^2 \overline{) +42x^2 - 56x^3 + 49x^4} \\ \underline{\mp 42x^2 \pm 56x^3 \mp 49x^4} \\ 0. \end{array}$$

B. Die Proportionen.

1. Die arithmetischen Proportionen.

Wenn $a + b = c + d$, so ist

91. $a - c = d - b$.

92. $c + d = a + b$; $d - b = a - c$.

93. $b + a = d + c$; $c - a = b - d$.

94. Die Proportion kann von links nach rechts oder von rechts nach links gelesen werden. (92 und 93.)

95. $a - d = c - b$. (Vgl. 91.)

96. Wenn $a - x = x - b$, so ist

$$x = \frac{a + b}{2}.$$

97. $\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = a$; $\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = b$.

98. Wenn $(x - a_1) + (x - a_2) + \dots + (x - a_n) = 0$, so ist

$$x = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

2. Die geometrischen Proportionen.

Wenn $ab = cd$, so ist

99. $\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$.

100. $cd = ab$; $\frac{d}{b} = \frac{a}{c}$.

101. $ba = dc$; $\frac{c}{a} = \frac{b}{d}$.

102. $= 94$.

103. $\frac{a}{d} = \frac{c}{b}$. (Vgl. 99.)

104. $\frac{a \pm c}{c} = \frac{d \pm b}{b}$. (Vgl. 99.)

105. $\frac{a + c}{a - c} = \frac{d + b}{d - b}$.

106. Wenn $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$, so ist
 $x = \sqrt{ab}$.

107. Wenn $\frac{x}{a_1} \cdot \frac{x}{a_2} \dots \frac{x}{a_n} = 1$,
so ist $x = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$.

108. Wenn $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$, so ist
 $\frac{a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n}{b_1 \pm b_2 \pm \dots \pm b_n} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$.

C. Die Gleichungen.

I. Algebraische Gleichungen.

109. Gleiche Rechnungen mit gleichen Zahlen geben gleiche Resultate.

110. Jedes Glied einer Gleichung kann mit entgegengesetztem Vorzeichen auf die andre Seite gebracht werden.

1. Die Gleichung vom 1. Grade.

Beispiele der Reduct. u. Auflös.:

1) $(2x-5)(3x-10)=(x-4)(6x-9)$

$$\begin{array}{r|l} 6x^2-15x & 6x^2-24x \\ -20x+50 & -9x+36 \\ \hline -35x+50 & -33x+36 \\ -35x+33x & =+36-50 \\ -2x & =-14 \\ x & =7. \end{array}$$

2) $1 + \sqrt{x^2 - 9} = x.$

$$\sqrt{x^2 - 9} = x - 1$$

$$x^2 - 9 = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$2x = 9 - 1 = 8$$

$$x = 4.$$

3) $\frac{3x+5}{4} - \frac{x+7}{3} = \frac{x+3}{12}.$

$$9x + 15 - 4x - 28 = x + 3$$

$$5x - 13 = x + 3$$

$$4x = 16$$

$$x = 4.$$

Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

Beispiel: 1) $2x + 3y = 19.$

2) $7x - 8y = 11.$

1) Substitutionsmethode.

1) $x = \frac{19-3y}{2}$; in 2) eingesetzt:

2) $\frac{133-21y}{2} - 8y = 11$

$$133-21y-16y=22$$

$$-37y=22-133=-111$$

$$y=3.$$

1) $x = \frac{19-9}{2} = 5.$

2) Comparationsmethode.

1) $x = \frac{19-3y}{2}$; 2) $x = \frac{11+8y}{7}$

$$\frac{19-3y}{2} = \frac{11+8y}{7}$$

$$133-21y=22+16y.$$

Weiter wie oben.

3) Additionsmethode.

1) $14x + 21y = 133$

2) $\mp 14x \pm 16y = \mp 22$

$$37y = 111;$$

$$y = 3.$$

1) $2x + 9 = 19;$

$$2x = 10$$

$$x = 5.$$

4) Determinantenmethode.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 19 & 3 \\ 11 & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -8 \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 19 \\ 7 & 11 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -8 \end{vmatrix}};$$

$$x = \frac{-152-33}{-16-21} = \frac{-185}{-37} = 5$$

$$y = \frac{22-133}{-16-21} = \frac{-111}{-37} = 3.$$

111. Jede Unbekannte eines Systems von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten ist gleich einem Quotienten, dessen Divisor die Determinante des Systems ist, und dessen Dividend aus dem Divisor hervorgeht, wenn man darin die Coefficienten jener einen Unbekannten der Reihe nach durch die rechten Seiten der Gleichungen ersetzt.

112. Damit ein System von n homogenen, auf Null gebrachten Gleichungen 1. Grades mit n Unbekannten eine Lösung habe, muss die Determinante des Systems verschwinden.

2. Die Gleichung vom 2. Grade.

Beispiel: $x^2 - 7x = -12$.

$$x^2 - 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = -12 + \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = -12 + \frac{49}{4} = \frac{1}{4};$$

$$x - \frac{7}{2} = \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{2};$$

$$x_1 = \frac{7}{2} + \frac{1}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} = 3.$$

113. Ist $x^2 + ax + c = 0$, und x_1, x_2 die Wurzeln der Gleichung, so ist

$$x_1 + x_2 = -a; \quad x_1 x_2 = c, \text{ und:}$$

114. $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + ax + c = 0.$

Die imaginäre Einheit.

115. $+i = +\sqrt[2]{-1}; \quad -i = -\sqrt[2]{-1}.$

116. $(+i)(-i) = -i^2 = +1.$

117. $\frac{1}{+i} = -i; \quad \frac{1}{-i} = +i.$

118. $i^{4n} = +1; \quad i^{4n+1} = +i$
 $i^{4n+2} = -1; \quad i^{4n+3} = -i.$

Imaginäre und complexe Zahlen.

119. Wenn $a + bi = x; \quad a - bi = y$, so ist:

$$x + y = 2a; \quad x - y = 2bi; \quad xy = a^2 + b^2;$$

$$x^2 = a^2 - b^2 + 2abi; \quad y^2 = a^2 - b^2 - 2abi.$$

120. Summe, Differenz, Product und Quotient von zwei complexen Zahlen sind wieder complexe Zahlen.

120a. $\sqrt{a \pm \sqrt{a^2 - b^2}} =$

$$\sqrt{\frac{a+b}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-b}{2}}.$$

3. Die Gleichung vom 3. Grade.

Beispiel: $x^3 - 6x^2 + 3x + 38 = 0.$

$$x = y + 2.$$

$$\begin{array}{r|l} y^3 + 6y^2 + 12y + 8 & \\ - 6y^2 - 24y - 24 & \\ \hline + 3y + 6 & \\ + 38 & \end{array} = 0$$

$$y^3 - 9y + 28 = 0.$$

$$y = u + v$$

$$u^3 + v^3 + (u+v)(3uv-9) + 28 = 0.$$

$$3uv - 9 = 0; \quad uv = 3.$$

$$u^3 + v^3 = -28; \quad u^3 v^3 = 27.$$

$$u^3 = u_1; \quad v^3 = v_1.$$

$$u_1 + v_1 = -28; \quad u_1 v_1 = 27.$$

$$(u_1 \pm v_1)^2 - 4u_1 v_1 = 784 - 108$$

$$(u_1 - v_1)^2 = 676.$$

$$u_1 - v_1 = 26$$

$$u_1 + v_1 = -28$$

$$u_1 = -1; \quad v_1 = -27;$$

$$u = -1; \quad v = -3.$$

$$y = -4; \quad x = -2.$$

121. Ist $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, und x_1, x_2, x_3 die Wurzeln der Gleichung, so ist

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a;$$

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = b;$$

$$x_1 x_2 x_3 = -c.$$

4. Die Gleichung vom 4. Grade.

Beispiel: $x^4 - 4x^3 + 20x - 25 = 0.$

$$x = y + 1$$

$$\begin{array}{r|l} y^4 + 4y^3 + 6y^2 + 4y + 1 & \\ - 4y^3 - 12y^2 - 12y - 4 & \\ \hline + 20y + 20 & \\ - 25 & \end{array} = 0$$

$$y^4 - 6y^2 + 12y - 8 = 0.$$

$$u - v = -6$$

$$y^4 + uy^2 = vy^2 - 12y + 8;$$

$$\left(y^2 + \frac{u}{2}\right)^2 = vy^2 - 12y + \left(8 + \frac{u^2}{4}\right);$$

$$\begin{aligned} \mu^2 &= v; \quad 2\mu v = 12; \quad v^2 = 8 + \frac{u^2}{4}; \\ 4v \left(8 + \frac{u^2}{4} \right) &= 144; \\ 4(u+6) \left(8 + \frac{u^2}{4} \right) &= 144 \\ u^3 + 6u^2 + 32u &= -48. \\ u &= z - 2 \\ \begin{array}{r|l} z^3 - 6z^2 + 12z - 8 & \\ + 6z^2 - 24z + 24 & \\ + 32z - 64 & \\ + 48 & \end{array} &= 0 \\ \hline z^3 + 20z &= 0; \quad z=0; \quad u=-2 \\ & \quad \quad \quad v=4. \\ (y^2-1)^2 &= 4y^2 - 12y + 9 = (2y+3)^2; \\ y^2 - 1 &= \pm (2y+3); \\ y^2 \mp 2y &= 1 \pm 3. \\ y^2 - 2y &= 4; \quad y^2 + 2y = -2 \\ (y-1)^2 &= 5; \quad (y+1)^2 = -1 \\ y &= 1 \pm \sqrt{5}; \quad y = -1 \pm \sqrt{-1}. \\ 122. \text{ Ist } x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d &= 0, \\ & \text{ und } x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ die Wurzeln} \\ & \text{ der Gleichung, so ist} \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= -a; \\ x_1x_2 + x_3x_4 + x_2x_3 + x_4x_1 + x_3x_1 + & \\ & \quad x_2x_4 = b; \\ x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_1 + & \\ & \quad x_4x_1x_2 = -c; \\ x_1x_2x_3x_4 &= d. \end{aligned}$$

II. Exponentialgleichungen.

Beispiel: $100^x = 1000$.

$$x \cdot {}^{10}l_{100} = {}^{10}l_{1000}; \quad x = \frac{{}^{10}l_{1000}}{{}^{10}l_{100}} = \frac{3}{2}.$$

D. Die Reihen.

I. Die arithmetische Reihe.

1. Reihen erster Ordnung.

a. Reihen erster Stufe.

$$123. \quad s = a + (a+d) + (a+2d) + \dots + u.$$

$$124. \quad u = a + (n-1)d.$$

$$125. \quad s = (a+u) \frac{n}{2}.$$

$$126. \quad s = [2a + (n-1)d] \frac{n}{2} \\ = an + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d.$$

$$127. \quad \infty \pm a = \infty; \quad \infty \cdot a = \infty; \quad \infty : a = \infty;$$

$$\infty^a = \infty; \quad \sqrt[a]{\infty} = \infty.$$

b. Reihen zweiter Stufe.

$$128. \quad a \cdot n = \frac{a(a-1)(a-2)\dots[a-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}.$$

$$129. \quad a \cdot n = \frac{1 \cdot 2 \dots a}{1 \cdot 2 \dots n \cdot 1 \cdot 2 \dots (a-n)} = \frac{a!}{n!(a-n)!}.$$

$$130. \quad a \cdot n = \frac{(n+1)(n+2)\dots a}{1 \cdot 2 \dots (a-n)}.$$

$$131. \quad a \cdot 0 = 1.$$

$$132. \quad a \cdot 1 = 1.$$

$$133. \quad a \cdot (a-n) = a \cdot n.$$

$$134. \quad a \cdot (n+1) = \frac{a-n}{n+1} \cdot a \cdot n.$$

$$135. \quad a \cdot (n-1) = \frac{n}{a-n+1} \cdot a \cdot n.$$

$$135a. \quad a \cdot (a+1) = 0.$$

$$135b. \quad a \cdot (-1) = 0.$$

$$136. \quad (a+1) \cdot n = a \cdot n + a \cdot (n-1).$$

$$137. \quad (a+b) \cdot n = a \cdot n b \cdot 0 + a \cdot (n-1) b \cdot 1 \\ + \dots + a \cdot 0 b \cdot n.$$

$$138. \quad (-a) \cdot n = (-1)^n \cdot (a+n-1) \cdot n.$$

$$139. \quad \left(\frac{1}{a} \right) \cdot n = \frac{(1-a)(1-2a)\dots[1-(n-1)a]}{a^n \cdot 1 \cdot 2 \dots n}.$$

2. Reihen höherer Ordnung.

$$140. \quad \text{Ist } a_1, a_2, \dots \text{ die erste Differenz-} \\ \text{reihe von } b_1, b_2, \dots, \text{ so ist} \\ b_{n+1} - b_n = a_n.$$

141. Sind $a, b, c, \dots$ die Anfangsglieder einer Reihe höherer Ordnung und ihrer successiven Differenzreihen, so ist ihr n^{tes} Glied

$$s_n = a(n-1)^{\cdot 0} + b(n-1)^{\cdot 1} + c(n-1)^{\cdot 2} + \dots$$

142. Unter Voraussetzung 140 ist $b_{n+1} = b_1 + (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$.

143. Unter Voraussetzung 141 ist die Summe der n ersten Glieder einer Reihe höherer Ordnung:

$$S_n = a \cdot n^{\cdot 1} + b \cdot n^{\cdot 2} + c \cdot n^{\cdot 3} + \dots$$

II. Die geometrische Reihe.

144. $s = a + aq + aq^2 + \dots + u$.

145. $u = aq^{n-1}$.

146. $s = \frac{uq - a}{q - 1}$.

147. $s = \frac{aq^n - a}{q - 1} = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

147a. $q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1 = \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

148. Für die unendliche fallende Reihe ist

$$s_1 = \frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \dots$$

149. $\frac{1}{0} = \infty$; $\frac{1}{\infty} = 0$.

150. $\frac{a}{1-q} = a + aq + aq^2 + \dots$

E. Die Kettenbrüche.

I. Endliche Kettenbrüche.

151. Verwandlung eines Quotienten in einen Kettenbruch.

Beispiel: $\frac{7}{11}$.

$$\begin{array}{r|l} 7 & 11 \mid 1 \\ \hline & 7 \\ \hline 4 & 7 \mid 1 \\ & 4 \\ \hline 3 & 4 \mid 1 \\ & 3 \\ \hline 1 & 3 \mid 3 \\ & 3 \\ \hline & 0 \end{array} \quad \frac{7}{11} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}}$$

152. Der Werth eines Kettenbruchs mit $p + 1$ Nennern ($1/q_1 + 1/q_2 + \dots$) entsteht aus demjenigen mit p Nennern, indem man

$$1 \text{ durch } q_p + 1$$

$$q_p \text{ durch } q_p \cdot q_{p+1} + 1$$

ersetzt.

153. Bezeichnet man mit $[q_1 q_2 q_3 \dots]$ die Summe der Ausdrücke, welche aus dem Producte $q_1 q_2 q_3 \dots$ dadurch hervorgehen, dass man auf alle möglichen Arten eine gerade Anzahl zusammenstehender Factoren weglässt, so ist der Kettenbruch, dessen Nenner $q_1, q_2, \dots$ sind, gleich dem Quotienten

$$\frac{[q_2 q_3 \dots]}{[q_1 q_2 q_3 \dots]}$$

154. Zähler und Nenner des Werthes eines Kettenbruchs haben die Form

$$a \cdot q_p + b \cdot 1.$$

155. Werth des Kettenbruchs als Quotient zweier Determinanten:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 1 & . & 0 & 0 \\ 0 & -1 & q_3 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & q_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & q_n \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} q_1 & 1 & 0 & . & 0 & 0 \\ -1 & q_2 & 1 & . & 0 & 0 \\ 0 & -1 & q_3 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & q_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & q_n \end{array}$$

156. Die successiven Näherungswerthe eines Kettenbruches sind abwechselnd grösser und kleiner als der Werth des Kettenbruches, und zwar sind diejenigen von ungerader Ordnung grösser, diejenigen von gerader Ordnung kleiner.

157. Zwischen den Zählern wie zwischen den Nennern von drei aufeinander folgenden Näherungswerthen besteht, wenn der letzte Näherungsbruch mit q_{p+1} schliesst, die Beziehung:

$$x_{p+2} = x_{p+1} \cdot q_{p+2} + x_p \cdot 1.$$

$$158. \frac{x_n}{y_n} = \frac{x_{n-1} q_n + x_{n-2} \cdot 1}{y_{n-1} q_n + y_{n-2} \cdot 1}.$$

$$159. \frac{x_{p-1}}{y_{p-1}} - \frac{x_p}{y_p} = (-1)^p \cdot \frac{1}{y_{p-1} \cdot y_p}.$$

160. Jeder in kleineren Zahlen als ein Näherungswerth ausgedrückte Bruch ist von dem Werthe des Kettenbruchs um mehr verschieden als dieser Näherungswerth.

Diophantische Gleichungen.

161. Beispiel: $11x - 7y = +1$.

$\frac{7}{11}$ als Kettenbruch s. 151.
Vorletzter (dritter) Näherungswerth ist $\frac{2}{3}$. Da derselbe von ungerader Ordnung ist, so haben x und y dasselbe Zeichen, wie die rechte Seite der Gleichung, also $x = +2$; $y = +3$.

162. Beispiel: $11u + 7v = 5$.

$\frac{7}{11}$ als Kettenbruch, wie oben; dgl. der Näherungswerth. Also

$$u = +2 \cdot 5 = +10;$$

$$v = -3 \cdot 5 = -15.$$

163. Weitere Lösungen.

$$u_1 = u + n \cdot 7; \quad v_1 = v - n \cdot 11.$$

$$u_1 = 10 + 7n; \quad v_1 = -15 - 11n.$$

II. Unendliche Kettenbrüche.

Darstellungen der Wurzel einer quadratischen Gleichung als Kettenbruch.

1) Beispiel: $y^2 + 4y = 4$.

$$y = -2 \pm \sqrt{8}; \quad y(y+4) = 4;$$

$$y = \frac{4}{4+y};$$

$$y = 4/4 + 4/4 + 4/4 + \dots$$

$$\sqrt{8} = 2 + 4/4 + 4/4 + \dots$$

2) Beispiel: $\sqrt{8} = 2 + \frac{1}{c_0}$.

$$\frac{1}{c_0} = \sqrt{8} - 2$$

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{8}-2} = \frac{\sqrt{8}+2}{4} = 1 + \frac{1}{c_1}$$

$$\frac{1}{c_1} = \frac{\sqrt{8}+2-4}{4} = \frac{\sqrt{8}-2}{4}$$

$$c_1 = \frac{4}{\sqrt{8}-2} = \frac{4(\sqrt{8}+2)}{4} = \sqrt{8}+2 = 4 + \frac{1}{c_2}.$$

$$\frac{1}{c_2} = \sqrt{8}+2-4 = \sqrt{8}-2 = \frac{1}{c_0};$$

$$c_2 = c_0; c_3 = c_1; \dots$$

$$\sqrt{8} = 2 + 1/\bar{1} + 1/\bar{4} + 1/\bar{1} + 1/\bar{4} + \dots$$

Verwandlung
eines periodischen Kettenbruchs
in einen irrationalen Ausdruck.

Beispiel:

$$y = 1/\bar{1} + 1/\bar{4} + 1/\bar{1} + 1/\bar{4} + \dots$$

$$y = 1/\bar{1} + 1/\bar{4} + y = 1/\frac{5+y}{4+y};$$

$$y = \frac{4+y}{5+y}; y^2 + 5y = 4 + y;$$

$$y^2 + 4y = 4; y = -2 \pm \sqrt{8}.$$

Angewandte Arithmetik.

I. Die Decimalrechnung.

1. Ganze Decimalzahlen.

164. Links von den Ziffern der Decimalzahl können Nullen beliebig gesetzt und weggelassen werden. — Eine Decimalzahl wird mit 10^n multiplicirt, indem man rechts n Nullen hinzufügt.

Bestimmung der Quadratwurzel.

Beispiel: $\sqrt{41|37|06|24} = 6432$

$$\begin{array}{r} 36 \\ 12\overline{)4537} \\ \underline{496} \\ 1283\overline{)4106} \\ \underline{3849} \\ 1286\overline{)25724} \\ \underline{25724} \\ 0. \end{array}$$

Bestimmung
des grössten gemeinsamen Factors
zweier Decimalzahlen.

Beispiel: $629|703|1$

$$\begin{array}{r} 629 \\ 74\overline{)629|8} \\ \underline{592} \\ 37\overline{)74|2} \\ \underline{74} \\ 0. \end{array}$$

Also ist 37 der grösste gemeinsame Factor von 629 und 703.

Elimination einer Unbekannten
aus zwei Gleichungen beliebigen
Grades.

Beispiel: $2x^3y - xy^3 - 24 = 0;$
 $2x^2 - y^2 - 2 = 0.$

$$2x^2 - y^2 - 2 \mid 2x^3y - xy^3 - 24 \mid xy$$

$$\pm 2x^3y \pm xy^3 \pm 2xy$$

$$2xy - 24$$

$$2xy - 24 \mid 2x^2 - y^2 - 2 \mid \frac{x}{y} + \frac{12}{y^2}$$

$$\mp 2x^2 \pm \frac{24x}{y}$$

$$\frac{24x}{y} - y^2 - 2$$

$$\mp \frac{24x}{y} \pm \frac{288}{y^2}$$

$$\frac{288}{y^2} - y^2 - 2 = 0.$$

$$y^4 + 2y^2 = 288; y^2 = 16; y = 4; x = 3.$$

2. Decimalbrüche.

165. 166. Ein endlicher Decimalbruch ist gleich einem Quotienten, dessen Dividend die Decimalstellen, und dessen

Divisor eine Eins mit ebensoviele Nullen enthält, als Decimalstellen vorhanden sind.

167. Ein rein periodischer Decimalbruch ist gleich einem Quotienten, dessen Dividend die Periode, und dessen Divisor ebensoviele Neunen enthält, als die Periode Stellen hat.

168. Ein gemischt periodischer Decimalbruch ist gleich einem Quotienten, dessen Dividend erhalten wird, wenn man die vorperiodische Zahl von derselben um die erste Periode verlängerten Zahl subtrahirt, und dessen Divisor aus soviel Neunen besteht als die Periode Stellen hat, und aus soviel Nullen, als vorperiodische Stellen da sind.

3. Näherungswerthe.

169. Die letzte Ziffer eines abgekürzten Decimalbruchs wird um 1 vergrößert, wenn die erste Ziffer des weggelassenen Theils ≥ 5 ist.

Näherungsweise Bestimmung der Wurzel einer Gleichung.

Beispiel:

$$A = x^3 + x - 5 = 0;$$

$$\begin{cases} x = 1, 2 \\ A = -3, +5; \end{cases} x = 1 + \frac{1}{y}$$

$$1 + \frac{3}{y} + \frac{3}{y^2} + \frac{1}{y^3} + 1 + \frac{1}{y} - 5 = 0;$$

$$-3 + \frac{4}{y} + \frac{3}{y^2} + \frac{1}{y^3} = 0;$$

$$A_1 = -3y^3 + 4y^2 + 3y + 1 = 0.$$

$$\begin{cases} y = 1, 2 \\ A_1 = 5, -1; \end{cases} y = 1 + \frac{1}{z}$$

$$-3 - \frac{9}{z} - \frac{9}{z^2} - \frac{3}{z^3} + 4 + \frac{8}{z} + \frac{4}{z^2} + 3 + \frac{3}{z} + 1 = 0;$$

$$5 + \frac{2}{z} - \frac{5}{z^2} - \frac{3}{z^3} = 0;$$

$$A_2 = 5z^3 + 2z^2 - 5z - 3 = 0$$

$$\begin{cases} z = 1, 2 \\ A_2 = -1, +35; \end{cases} z = 1 + \frac{1}{u}; \text{ u. s. w.}$$

$$x = 1 + 1/\bar{1} + 1/\bar{1} + \dots = \frac{3}{2}.$$

Näherungsweise Bestimmung eines Logarithmus.

Beispiel $^{10}l2$ zu bestimmen.

$10^y = 2$	$2^{y_1} = 10$	$\left(\frac{5}{4}\right)^{y_2} = 2$
$\begin{cases} 10^0 = 1 \\ 10^1 = 10 \end{cases}$	$\begin{cases} 2^3 = 8 \\ 2^4 = 16 \end{cases}$	$\begin{cases} \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64} \\ \left(\frac{5}{4}\right)^4 = \frac{625}{256} \end{cases}$
$y = 0 + \frac{1}{y_1}$	$y_1 = 3 + \frac{1}{y_2}$	$y_2 = 3 + \frac{1}{y_3}$
$10^y = 10^{\frac{1}{y_1}}$	$2^{y_1} = 8 \cdot 2^{\frac{1}{y_2}}$	u. s. w.
$2 = 10^{\frac{1}{y_1}}$	$10 = 8 \cdot 2^{\frac{1}{y_2}}$	
$2^{y_1} = 10$	$\left(\frac{5}{4}\right)^{y_2} = 2$	

$$\text{Also } y = \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \dots}} = \frac{3}{10}.$$

170. Gemeines Logarithmen-system. — Der Logarithmus einer Potenz von 10 ist gleich ihrem Exponenten.

171. Die grössere von zwei Zahlen hat den grösseren Logarithmus.

172. Die Kennziffer eines Logarithmus ist um 1 kleiner als die Stellenzahl des Numerus.
173. Die Logarithmen solcher ganzen Zahlen, die sich nur durch angehängte Nullen von einander unterscheiden, haben dieselbe Mantisse und unterscheiden sich nur durch die Kennziffer.
174. In einem Decimalbruch hat die Stellung des Kommas keinen Einfluss auf die Mantisse.
175. Die Kennziffer des Logarithmus eines Decimalbruches ist um Eins kleiner als die Anzahl seiner ganzen Stellen.
176. Die Kennziffer des Logarithmus eines Decimalbruches, welcher mit Nullen beginnt, ist gleich der negativ genommenen Anzahl aller dieser Nullen.

II. Die Zinsrechnung.

1. Einfache Zinsrechnung.

$$177. z_1 = \frac{pc}{100}.$$

$$178. z_n = \frac{npc}{100}.$$

$$179. n = \frac{100z_n}{pc}; p = \frac{100z_n}{nc}; c = \frac{100z_n}{np}.$$

180. Ist s_n Summe von Capital und Zinsen, so ist

$$c = \frac{100s_n}{100 \pm np}.$$

2. Zinseszins-Rechnung.

$$181. 1 + \frac{p}{100} = q.$$

$$182. s_n = c \cdot q^n.$$

$$183. s = c \cdot q^n + b \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

184. Für $s=0$ und negatives b ist

$$cq^n = b \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Reine Combinatorik.

1. Das Permutiren.

185. Permutationszahl für lauter verschiedene Elemente:

$$P_n = n!$$

186. Dgl., wenn p gleiche Elemente da sind:

$$P_{np} = \frac{n!}{p!}.$$

187. Dgl., wenn p gleiche, q gleiche, r gleiche Elemente da sind:

$$P_{npqr\dots} = \frac{n!}{p!q!r!\dots}.$$

$$187a. P_{np(n-p)} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = n \cdot p.$$

2. Das Combiniren.

188. Combinationszahl ohne Wiederholung

$${}^p C_n = n \cdot p.$$

189. Dgl. mit Wiederholung

$${}^p C^n = (n + p - 1) \cdot p.$$

3. Das Variiren.

190. Variationszahl ohne Wiederholung:

$${}^p V_n = n \cdot p \cdot p!$$

191. Dgl. mit Wiederholung:

$${}^p V^n = n^p.$$

Angewandte Combinatorik.

I. Die Binomialreihe.

$$192. (x + a)^n = x^n + n \cdot^1 a x^{n-1} + n \cdot^2 a^2 x^{n-2} + \dots + n \cdot^{(n-1)} a^{n-1} x + n \cdot^n a^n.$$

$$193. (x + 1)^n = 1 + n \cdot^1 x + n \cdot^2 x^2 + \dots$$

$$193a. \frac{1}{(1-x)^n} = 1 + n \cdot^1 x + (n+1) \cdot^2 x^2 + (n+2) \cdot^3 x^3 + \dots$$

II. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

A. Wahrscheinlichkeit für einen Fall.

a. Einfache Wahrscheinlichkeit.

194. W., aus n gegebenen Elementen ein bestimmtes zu wählen.

$$w = \frac{1}{n}.$$

195. W., aus n gegebenen Elementen k vorher bestimmte zu wählen.

$$w = \frac{1}{n \cdot^k}.$$

196. Dgl. in bestimmter Reihenfolge.

$$w = \frac{1}{n \cdot^k \cdot k!}.$$

197. W., dass, wenn von n Elementen k gewählt werden, h vorher bestimmte dabei sind.

$$w = \frac{(n-h) \cdot^{(k-h)}}{n \cdot^k}.$$

198. Dgl., wenn h der gewählten k Elemente einer bestimmten Sorte angehören sollen, von der p vorhanden sind.

$$w = \frac{(n-p) \cdot^{(k-h)} \cdot p \cdot^h}{n \cdot^k}.$$

199. W., dass, wenn unter n Elementen p_1 der 1^{ten}, p_2 der 2^{ten}

... p_r der r^{ten} Sorte angehören, und k gewählt werden, alsdann h_1 von der 1^{ten}, h_2 von der 2^{ten}, ... h_r von der r^{ten} Sorte dabei sind.

$$w = \frac{p_1 \cdot^{h_1} \cdot p_2 \cdot^{h_2} \dots p_r \cdot^{h_r}}{n \cdot^k}.$$

200. W., mit einem Würfel die Summe s zu werfen:

$$w = \frac{1}{6}.$$

201. W., mit n Würfeln die Summe s zu werfen:

$$w = \frac{1}{6^n} [(s-1) \cdot^{(s-n)} + n \cdot^1 (s-7) \cdot^{(s-n-6)} + n \cdot^2 \cdot (s-13) \cdot^{(s-n-12)} + \dots].$$

202. Dgl., wenn jeder Würfel k Felder hat:

$$w = \frac{1}{k^n} [(s-1) \cdot^{(s-n)} + n \cdot^1 (s-1-k) \cdot^{(s-n-k)} + n \cdot^2 (s-1-2k) \cdot^{(s-n-2k)} + \dots].$$

b. Combinirte Wahrscheinlichkeit.

203. W., dass von n Ereignissen, deren einzelne W. $w_1, w_2, \dots w_n$ sind, eins eintreffe.

$$w = w_1 + w_2 + \dots + w_n.$$

204. Dgl., dass alle n Ereignisse eintreffen (in bestimmter Reihenfolge)

$$w = w_1 w_2 \dots w_n.$$

205. W., dass ein Ereigniss, dessen W. $\frac{a}{b}$ ist, n mal nach einander eintreffe.

$$w = \frac{a^n}{b^n}.$$

206. Dgl., wenn nach jedesmaligem Eintreffen die Zahl der möglichen und die der günstigen Fälle um 1 abnimmt.

$$w = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}.$$

207. Dgl. für mehrere Ereignisse im ersten Falle:

$$w = \frac{a_1^{n_1}}{b_1^{n_1}} \cdot \frac{a_2^{n_2}}{b_2^{n_2}} \dots$$

208. Im zweiten Falle:

$$w = \frac{a_1^{n_1}}{b_1^{n_1}} \cdot \frac{a_2^{n_2}}{b_2^{n_2}} \dots$$

B. Wahrscheinlichkeit für mehrere Fälle.

209. W., dass ein Ereigniss, dessen W. w_1 ist, spätestens beim n^{ten} Versuch eintritt.

$$w = 1 - (1 - w_1)^n.$$

210. Dgl., dass es bei n Versuchen k mal eintritt.

$$w = n \cdot w_1^k (1 - w_1)^{n-k}.$$

Register.

	Nr.		Nr.
Abhängige Gleichungen	97	Decimalbruch (decem)	159
Addend (num. addendus)	6	Decimalstelle	159
Addiren (addere)	6	Decimalzahl	155
Addition	5	Determinante (num. determinans)	97
„ fortschreitende	8	Determinanten-Methode	97
Additionsmethode	97	Differenz (differre)	11
Algebraische*) Ausdrücke	74	„ der Reihe	121
„ Gleichungen	91	Differenzreihe	136
Anfangsglied der Reihe	121. 140	Diophantische Gleichung	150
Arithmetik (ἀριθμητικὴ τέχνη)	1	Disconto*)	172
Arithmet. Mittel	82. 83	Dividend (num. dividendus)	24
„ Reihe	121	Dividiren (dividere)	24
Auflösung d. Gleichungen	89. 90. 94	Division	23
Augend (num. augendus)	6	Divisor	24
Baarzahlung	172	Einheit	1
Bedingungsgleichung	96	„ imaginäre	102
Bestimmungsgleichung	2	Einkaufspreis	172
Binom (bis, νέμω)	74	Eins	64
Binomialcoefficient	189	Element	177
Binomialreihe	189	Elimination (eliminare)	96
Biquadratische Gleichung	113	Endglied der Reihe	121. 140
Biquadratwurzel der Einheit	113	Erweiterung des Quotienten	29
Bruch	24	Exponent (num. exponens)	32
Bruchpotenz	45	„ der Binomialreihe	189
Buchstabengrösse	76	„ der Factorielle	126
Capital	171	„ der Wurzel	39
Cardanische Formel	110	Exponentialgleichung	91. 119
Cirkuläre Vertauschung	97		
Coefficient (num. coefficientens)	75	Factor	18
Combination	177	Factorielle	126
Combinatorik	177	Factoriellengebiet	128
Combiniren (combinare)	181	Facultät (facultas)	126
Comparationsmethode (comparare)	97	Form	177
Complexe Zahl (complexus)	104	Formel	2
Conjugirte Zahl (conjugare)	104	Funktion (fungi)	96
Cubikwurzel der Einheit	108		
Cubische Gleichung	108	Ganzes	6
		Geometrisches Mittel (Geometrie)	87

*) Al gebr (arabisch) die Ergänzung.

*) Richtiger Sconto, von scontare (ital.) abrechnen.

	Nr.		Nr.
Geometrische Reihe	140	Mantisse (mantissa, Zugabe)	168
Gewinn	172	Messung	25
Gleichung	2	Minuend (num. minuendus)	11
„ abhängige	97	Minusklammer	15
„ algebraische	91	Mittel, arithmetisches	82
„ auf Null gebrachte	92	„ geometrisches	87
„ biquadratische	113	Multiplicand (num. multiplicandus)	18
„ cubische	108	Multiplication	17
„ diophantische	150	„ fortschreitende	20
„ gemischte	93	Multiplicator	18
„ geordnete	92	Multipliciren (multiplicare)	18
„ homogene	97		
„ lineare	95	Näherungsbruch	148
„ quadratische	98	Näherungswerth des Kettenbr.	148
„ reine	93	„ des Decimalbr.	164
„ symmetrische	99	Negative Zahl (negare)	61
„ transcendente	91	Nenner	24
„ widersprechende	94. 97	„ des Kettenbruchs	145
Glied der Determinante	97	Normalform des Polynoms	75
„ des Polynoms	74	„ der Gleichung	92
„ „ gleichnamiges	76	Null	58
„ der Proportion	78	Numerus	48
„ der Reihe	121		
„ „ allgemeines	121	Ordnen der Elemente	179
Grad der Gleichung	92	„ der Gleichung	92
„ „ Potenz	32	„ der Permutationen	179
„ „ Wurzel	39	„ des Polynoms	75
Grundzahl der Binomialreihe	189		
„ der Factorielle	126	Periode des Decimalbruchs	162
„ des Logarithmus	48	„ des Kettenbruchs	152
„ der Potenz	32	Permutation	178
		Permutiren (permutare)	178
Heraussetzung d. gem. Factors	21	Plusklammer	15
Homogene Gleichung ($\delta\mu\omicron\gamma\epsilon\nu\acute{\eta}\varsigma$)	97	Polygonalzahl (Polygon)	136
		Polynom ($\pi\omicron\lambda\acute{\upsilon}\varsigma$, $\nu\acute{\epsilon}\mu\omega$)	74
Imaginäre Einheit (imaginaire)	102	Positive Zahl (ponere)	61
„ Zahl	104	Potenz (potentia)	32
Irrationale Zahl (ratio, Verhältniss)	71	„ fallende	75
Irreductibler Fall (casus irreductibilis)	111	„ gerade	62
		„ steigende	75
		„ ungerade	62
Kennziffer	168	Potenziren	32
Kettenbruch	145	Potenzirung	31
Kettenrest	148	Potenzreihe	120
Kürzung des Quotienten	29	Procente (pro centum)	171
		Product (productum)	18
Lineare Gleichung (linea)	95	Productreihe	120
Logarithmiren	48	Proportion	78
Logarithmus ($\lambda\omicron\gamma\alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$)	48	„ arithmetische	79
Logarithmisches System	168	„ fortleitende	88
„ Tafel	169	„ geometrische	84
		„ stetige	82. 87

	Nr.		Nr.
Proportion, zusammengesetzte . . .	88	Unendlicher Decimalbruch . . .	162
Proportionale, vierte . . .	78	„ Kettenbruch . . .	151
„ mittlere arithm. . .	82	„ Reihe . . .	120
„ „ geom. . .	87	Unterdeterminante . . .	97
Pyramidalzahl (Pyramide) . . .	136	Variation . . .	184
Quadrat . . .	35	Variiren (variare) . . .	184
Quadratische Gleichung . . .	98	Verkaufspreis . . .	172
Quadratwurzel . . .	76	Verlust . . .	172
„ der Einheit . . .	98	Vertauschung, cirkuläre . . .	97
Quotient (quotiens) . . .	24	Vorzeichen . . .	61
„ der Reihe . . .	140	Wahrscheinlichkeit . . .	190. 192
Rabatt (rabattre) . . .	172	Wahrscheinlichkeitsrechnung . . .	191
Radicand (num. radicandus) . . .	39	Werth des Kettenbruchs . . .	145
Radiciren . . .	39	Widersprechende Gleichung . . .	94. 97
Radicirung (radix) . . .	38	Wurzel . . .	39
Rechenlineal . . .	169	„ der Gleichung . . .	90
Reduction der Gleichung . . .	92. 99	Zähler . . .	24
Reelle Zahl . . .	104	„ des Kettenbruchs . . .	145
Reihe . . .	120	Zahl . . .	1
Rente . . .	176	„ absolute . . .	56
Resultante (num. resultans) . . .	97	„ allgemeine . . .	1
Seite der Gleichung . . .	2	„ complexe . . .	104
Statistik . . .	190	„ conjugirte . . .	104
Stelle . . .	155	„ einfache . . .	1
„ ganze . . .	159	„ entgegengesetzte . . .	61
Substitutionsmethode (substituere) . . .	97	„ ganze . . .	67
Subtraction . . .	10	„ gleichstimmige . . .	61
Subtrahend (num. subtrahendus) . . .	11	„ imaginäre . . .	104
Subtrahiren (subtrahere) . . .	11	„ irrationale . . .	71
Summand (num. summandus) . . .	6	„ natürliche . . .	1
Summe (summa) . . .	6	„ negative . . .	61
Summenreihe . . .	120	„ positive . . .	61
„ der arithm. Reihe . . .	135	„ rationale . . .	71
Symmetrische Gleichung . . .	99	„ reelle . . .	104
System, logarithmisches . . .	168	„ relative . . .	56
Theil . . .	6	„ specielle . . .	1
Theilung . . .	25	„ umgekehrte . . .	67
Transcendenter Ausdruck (transcendere) . . .	74	„ unendlich grosse . . .	124
„ Gleichung . . .	91	„ zusammengesetzte . . .	1
Umgekehrte Zahl . . .	67	Zahlsystem . . .	154
Unbekannte der Gleichung . . .	90	Ziffer . . .	154. 155
Unendlich grosse Zahl . . .	124	Zinsen . . .	171
		Zinseszins . . .	173
		Zinsfuss . . .	171

Berichtigungen.

Seite 101 Zeile 12 v. u. lies $0 \cdot 0$ statt 0^0 .

„ 119 „ 9 v. o. füge nach 159 hinzu: nachdem darin
 $p + 1$ für p gesetzt ist.

„ „ „ 14 v. u. lies $y = \frac{1}{2} a_1$ statt $y = \frac{1}{2} a$.

„ 131 „ 18 v. o. lies ax^{-1} statt $a - x^{-1}$.

Berichtigungen zu Teil I.

S. 26, Z. 6 v. u. lies $\sqrt[m-1]{m}$ statt $m-1\sqrt{m}$.

S. 43 füge zur Anmerkung hinzu:

Ist $ac=0$, so kann man dafür schreiben $ac=bc-bc$. Ist nun $c \geq 0$, so kann man die ganze Formel durch c dividiren und erhält $a=b-b=0$; d. h.: Ist ein Produkt gleich Null, so muss einer seiner Faktoren gleich Null sein.

S. 46, in Formel 75, 3) lies $\frac{-be}{+e}$ statt $\frac{-be}{-e}$.

S. 46 Z. 10 v. o. füge nach den Worten „Hieraus folgt:“ hinzu:

75a. Das Produkt mehrerer relativer Zahlen ist positiv oder negativ, jenachdem die Anzahl der negativen Faktoren gerade oder ungerade ist.

S. 89 schalte in der untersten Formel $\mp$ hinter y^2 ein.

S. 100, in Formel 131 lies $\frac{a!}{a!}$ statt $\frac{!}{a!}$.

S. 110, Z. 18 v. o. lies $1-q$ statt $q-1$.

S. 114, Z. 6 v. u. schalte hinter „fehlt.“ ein: (Der Faktor q_n ist zum Zeichen, dass er nicht fehlen darf, mit einem Strich versehen.)

S. 119 in Satz 161 lies $y = \pm a_1$ statt $y = \pm a$.

S. 120 in Satz 162 lies $\frac{b}{a}$ statt $\frac{a}{b}$.

S. 160, Z. 16 v. o., Z. 6 u. 9 v. u., S. 161, Z. 1 v. o. lies $-n \cdot 1$ statt $n \cdot 1$. Ausserdem muss in den Formeln 201, 202 und in derjenigen, welche 201 vorangeht, das letzte Zeichen $-$ statt $+$ sein.

S. 171, links Z. 12—14 sind die Zeichen vor 3, Z. 15 die Zeichen vor $2y$, Z. 16 die in den Klammern vor 1 stehenden, Z. 17 die nach den Gleichheitszeichen vor 1 stehenden Zeichen umzukehren.

In meinem Verlage sind nachstehende, meist für höhere Lehranstalten geeignete Lehrbücher erschienen:

Repetitorium
der
lateinischen Grammatik und Stilistik
nebst einem Anhang:
Einige Regeln für die Abfassung lateinischer Aufsätze
von
Dr. H. Menge,
Oberlehrer am Gymnasium zu Sangerhausen.
Dritte Auflage.
Preis 1. Theil 1 M. 50 Pf., 2. Theil 3 M. 50 Pf.
Preis für Theil 1 u. 2 4 Mk. 50 Pf.

Kurzgefasste
lateinische Synonymik
für die obersten Gymnasialklassen
bearbeitet von
Dr. H. Menge.
Zweite bedeutend vermehrte Auflage.
13 Bogen gr. 8. Preis 2 Mark 40 Pf.

Die Lehrbücher von Menge erfreuen sich eines guten Rufs und ist namentlich dessen Repetitorium auf vielen Gymnasien Deutschlands und des Auslandes zur Anschaffung empfohlen und im Gebrauch.

Geschichte
der
deutschen Literatur
mit
besonderer Berücksichtigung der
modernen Kulturbestrebungen,
im Umriss bearbeitet
von
Dr. H. Menge.
28 Bogen gr. 8. Preis 5 Mark.

Handbuch zur Einführung
in
die deutsche Literatur.
Für die oberen Classen
mittlerer und höherer Volksschulen
sowie gehobener Bildungsanstalten überhaupt
bearbeitet von
Karl Grossmann,
Schuldirector in Annaberg.
I. Theil: Die Poesie. 2. Aufl.
II. Theil: Die Prosa.
Preis eines jeden 20 Bogen 80 starken
Theiles: 1 Mk. 25 Pf.

Wolfenbüttel.

Grundriss
der
Weltgeschichte
für die oberen Classen
höherer Lehranstalten
von
Dr. A. Gehrke,
Oberlehrer am Gymnasium in Rudolstadt.
1r Theil: Alterthum. Preis 1 Mk. 80 Pf.
2r „ Mittelalter. „ 1 „ 25 „
3r „ Neuzeit. „ 1 „ 80 „
Theil 1—3 in einen Band brosch. 4 Mk. 50 Pf.

Lehrbuch
der elementaren Mathematik
von
Victor Schlegel,
Oberlehrer am Gymnasium in Waren.
1. Theil: Arithmetik und Combinatorik.
Preis 2 Mk. 40 Pf.

Kurzgefasste
französ. Synonymik
für Schüler bearbeitet
von
Dr. Friedrich Koldewey,
Oberlehrer am Gymnasium in Wolfenbüttel.
5 Bgn. 80 steif brosch. Preis 1 Mark.

Leitfaden
zur
Kunstgeschichte cultivirter Völker
alter und neuer Zeit.
Zusammengestellt von
A. Thamm,
Rector der priv. höh. Töcherschule in Striegau.
Zweite Auflage.
9 Bgn. 80. Preis 1 Mk. 50 Pf.

Grundzüge
der **Wirthschaftslehre.**
Ein Leitfaden
für den Unterricht an landwirth-
schaftlichen u. andern gewerblichen
Lehranstalten
bearbeitet von
Dr. Victor Funk,
Director d. landw. Schule Marienberg zu Helmstedt.
5 Bgn. 8. brosch. Preis 1 Mk. 20 Pf.

Julius Zwissler.

Jede Buchhandlung ist bereit, oben angezeigte Werke zur Ansicht mitzutheilen.

Schlegel, Victor, 1843-1905

Lehrbuch der elementaren Mathematik

Bd.: 1

Wolfenbüttel 1878

Math.u. 176 m-1/2

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11374297-3